Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2000/2001
Übungsblatt 9
12. Dezember 2000

Diskrete Strukturen I

(Aufgabensteller: Thomas Schickinger)

Abgabetermin für die Computeraufgaben: Dienstag, 19. Dezember 2000 (16.00 Uhr)

Tutoraufgabe 1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i in

$$n! = \sum_{i=0}^{n} a_i n^{\underline{i}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Binomialinversion.

Tutoraufgabe 2

Zu einer Reihe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei die erzeugende Funktion $G(z)$ bekannt. Was ist die erzeugende Funktion von

a) $a_n := g_n \cdot ((n+1) \bmod 2)$ (nur die geradzahligen Glieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$),

b) $b_n := \sum_{i=0}^{n} g_i$?

Tutoraufgabe 3

Berechnen Sie die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Ermitteln Sie daraus die erzeugenden Funktionen von $a_n := f_{n+2}$ und $b_n := \sum_{i=0}^{n} f_i$. Betrachten Sie die Differenz der erzeugenden Funktionen $A(z) - B(z)$. Was schließen Sie aus dem Ergebnis?

Hinweis: *Die als freiwillig gekennzeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und sind für die Klausurzulassung ohne Bedeutung.*

Freiwillige Aufgabe 1

Sei $L_{n,k} := (-1)^n \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß

$$(-x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}\, x^{\underline{k}}.$$

Leiten Sie aus diesem Ergebnis her, daß für beliebige Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgende Aussage gilt:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}\, u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}\, v_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweise *zur Bearbeitung der Computeraufgaben finden Sie auf der Web-Seite zu den Übungen.*

Computeraufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie einen geschlossenen Ausdruck für folgende Summen:

a)

$$\sum_{k>n} \binom{n+k}{n} 2^{-k},$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} (n+2) \frac{k!}{(-n)^{\overline{k}}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Maple zur Lösung dieser Aufgabe. Wenn Sie noch nicht mit den Kommandos `sum` und `simplify` zum Berechnen von geschlossenen Ausdrücken für Summen vertraut sind, sollten Sie dazu einen Blick in die Online-Hilfe werfen. Außerdem lohnt es sich, auch beim Verwenden von Maple zu versuchen, auch selbst einmal die Terme ein wenig umzuformen.

Computeraufgabe 2 (6 Punkte)

Welche der folgenden Gesetze für die Differenzenoperatoren Δ und ∇, den Translationsoperator E und die Identität I gelten allgemein für beliebige Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?

a) $(\Delta\nabla)(f) = (E + E^{-1} - 2I)(f)$

b) $(\Delta - \nabla)(f) = (\Delta\nabla)(f)$

c) $(E\Delta\nabla)(f) = (E)(f)$

d) $(E\nabla^2)(f) = (E - 2I + E^{-1})(f)$

e) $(E - E^{-1})(f) = (I)(f)$

Computeraufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie $\Delta c^{\underline{x}}$.
Hinweis: Auch hier könnte Maple hilfreich sein (wenn man keine Lust hat zu rechnen).

Computeraufgabe 4 (4 Punkte)

Welche Produktregel gilt für den Rückwärts-Differenzenoperator ∇?