Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Esparza/Dr. S. Gerke

WS 2000/01
Übungsblatt 2
31. Oktober 2000

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

(Abgabetermin: Dienstag, den 7. November 2000, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sie haben 5 Kugeln, die mit $1, 2, 3, 4, 5$ beschriftet sind. Vier haben das selbe Gewicht und eine Kugel hat ein davon abweichendes Gewicht. Sie wollen nun mit Hilfe einer Waage, mit der Sie von zwei Mengen von Kugeln bestimmen können, ob die eine schwerer, genauso schwer oder leichter ist als die andere, herausfinden, welche Kugel ein anderes Gewicht hat und ob diese leichter oder schwerer ist als die anderen. Wie oft müssen Sie wiegen, um mit Sicherheit zum richtigen Ergebnis zu gelangen? Wie oft müssen Sie wiegen, wenn Sie insgesamt 13 Kugeln haben, von denen eine ein anderes Gewicht hat? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein binärer Suchbaum mit den Einträgen $1, \ldots, N$. Zeigen Sie, daß im Durchschnitt mindestens $O(\log N)$ Vergleiche benötigt werden, um ein Element zu finden.
(Tip: Zeigen Sie zuerst, daß man beim vollständige Binärbaum durchschnittlich die wenigsten Vergleiche benötigt und dann, daß man bei diesem im Durchschnitt $O(\log N)$ Vergleiche braucht.)

Aufgabe 3

Betrachten Sie einen binären gewurzelten Suchbaum T mit n Knoten. Wir erweitern den Baum T zu einem Baum T', indem wir zusätzliche $n+1$ Knoten als Blätter einfügen, so daß jeder der Knoten des ursprünglichen Baumes T genau zwei Kinder hat. Die *externe Pfadlänge* $E(T)$ des Baumes T ist die Summe der Länge der Pfade von der Wurzel zu allen Blättern von T'. Die *interne Pfadlänge* $I(T)$ ist die Summe der Länge der Pfade von der Wurzel zu einem Knoten über alle Knoten von T.
a) Beweisen Sie: $E(T) = I(T) + 2n$.
b) Sei C_n die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen einer erfolgreichen Suche in T und C'_n die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen einer erfolglosen Suche. Zeigen Sie, unter der Annahme, daß die Suche nach jedem der n Knoten bzw. nach jedem der der $n+1$ Intervalle zwischen den Einträgen gleich wahrscheinlich ist, daß $C_n = (1 + 1/n)C'_n - 1$.