Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Esparza/Dr. S. Gerke

WS 2000/01
Übungsblatt 5
21.November 2000

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

(Abgabetermin: Dienstag, den 28.November 2000, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir die erwartete Anzahl von Vergleichen des MFR bestimmen, wenn wir eine Liste a, b, c von drei Elementen haben und nur access-Operationen ausgeführt werden. Wir nehmen an, daß das Element a mit Wahrscheinlichkeit p, das Element b mit Wahrscheinlichkeit q und das Element c mit Wahrscheinlichkeit r gesucht wird, wobei $0 \leq p, q, r < 1$ und $p+q+r = 1$. Das MFR beschreibt eine Markovkette mit in diesem Fall $3! = 6$ Zuständen, wobei jeder Zustand eine der 6 Anordnungen der drei Elemente a, b, c beschreibt.

a) Verifizieren Sie, daß die folgenden Wahrscheinlichkeiten die stationäre Verteilung beschreiben.

$P(abc) = pq/(1-p)$, $P(acb) = pr/(1-p)$, $P(bac) = pq/(1-q)$, $P(bca) = qr/(1-q)$, $P(cba) = qr/(1-r)$, $P(cab) = pr/(1-r)$.

Beachten Sie, daß die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist und somit eine stationäre Verteilung existiert.

b) Berechnen Sie die zu erwartene Anzahl von Vergleichen, indem Sie die stationäre Verteilung zu Grunde legen.

c) Wie groß ist die erwartete Anzahl von Vergleichen, wenn $p = 3/4$ und $q = r = 1/8$?

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde bewiesen, daß $C_{MFR} \leq 2C_A(s) + X_A(s) - F_A(s) - m$. Zeigen Sie, daß es kein solches Resultat für das TR (Transposition-Rule) gibt.

Aufgabe 3

Wir modifizieren die Move-to-front-Heuristik derart, daß ein zugegriffenes Element an Position k nicht an den Anfang der Liste, sondern nur den halben Weg nach vorn, genauer an Position $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, gebracht wird (MHF-Heuristik). Zeigen Sie, daß

$$C_{MHF}(s) \leq 2(2C_A(s) + X_A(s) - F_A(s) - m)$$

für jede Folge s von Zugriffsoperationen der Länge m gilt.