Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Esparza/Dr. S. Gerke

WS 2000/01
Übungsblatt 8
19. Dezember 2000

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

(Abgabetermin: Dienstag, den 9.Januar, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Der Median einer n-elementigen Menge (aus einem total geordneten Universum) ist das $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-kleinste Element. Seien nun zwei sortierte Mengen mit je n Elementen gegeben (alle $2n$ Elemente seien paarweise verschieden). Zeigen Sie, daß der Median aller $2n$ Elemente in Zeit $O(\log n)$ bestimmt werden kann.

Aufgabe 2

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ positive Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Der *gewichtete* Median x_k ist definiert durch

$$\sum_{x_i \leq x_k} x_i \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{x_i \geq x_k} x_i \geq \frac{1}{2} \,.$$

Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der den gewichteten Median in Laufzeit $O(n)$ bestimmt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß ein Algorithmus, der das zweitgrößte Element einer n-elementigen Menge bestimmt, mindestens $n + \lceil \log n \rceil - 2$ Vergleiche im worst case benötigt.
Warum ist die zur Bestimmung des zweitgrößten Elements einer Menge M nötige Anzahl von Vergleichen gleich der Anzahl der Vergleiche, die zur Bestimmung der beiden größten Elemente von M benötigt werden?

Aufgabe 4

Der in der Vorlesung besprochene randomisierte Algorithmus zur Bestimmung des Medians von n Elementen partitioniert die Elemente in drei Mengen S_0, S_1, S_2. (Die Notation folgt der Vorlesung.) Zeigen Sie, daß mit Wahrscheinlichkeit $O(n^{-1/4})$ gilt, daß $\mid S_1 \mid \geq 4n^{3/4}$.

Tip: Sei k_i der Rang des Elementes $p_i, i \in \{1, 2\}$, d.h. man ist an der Wahrscheinlichkeit interessiert, daß $k_2 - k_1 + 1 \geq 4n^{3/4}$ ist. Nun gilt, daß $WS(k_2 - k_1 + 1 \geq 4n^{3/4}) \leq WS(k_1 \leq n/2 - 2n^{3/4}) + WS(k_2 \geq n/2 + 2n^{3/4})$ und außerdem daß $k_1 \leq n/2 - 2n^{3/4}$ genau dann wenn mindestens $n/2^{3/4} - \sqrt{n}$ Elemente mit Rang kleiner gleich $n/2 - 2n^{3/4}$ ausgewählt wurden.