Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Esparza/Dr. S. Gerke

WS 2000/01
Übungsblatt 9
16. Januar 2001

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

(Abgabetermin: Dienstag, den 16.Januar, in der Vorlesung)

Aufgabe 1

Ein Matroid ist wie folgt definiert: Sei S eine endliche Menge und $\mathcal{U}$ eine Familie von Untermengen von S. Das Paar $\mathcal{M} = (S,\mathcal{U})$ heißt ein Matroid und $\mathcal{U}$ die Familie von unabhängigen Mengen von $\mathcal{M}$, falls folgendes gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{U}$

(2) $A \in \mathcal{U}, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

(3) $A, B \in \mathcal{U}, \mid B \mid = \mid A \mid +1 \Rightarrow \exists v \in B \setminus A$ mit $A \cup \{v\} \in \mathcal{U}$

Eine maximale unabhängige Menge heißt Basis des Matroids.
Zeigen Sie, daß der folgende Algorithmus für ein Matroid $\mathcal{M} = (S,\mathcal{U})$ mit Gewichtsfunktion $w : S \to R$ eine Basis minimalen Gewichts findet.

(1) Sei $A_0 = \emptyset$

(2) Ist $A_1 = \{a_1, \dots , a_i\} \subseteq S$, so sei $X_i = \{x \in S \setminus A_i : A_i \cup \{x\} \in \mathcal{U}\}$. Falls $X_i = \emptyset$ ist, so ist A_i die gesuchte Basis. Andernfalls wähle ein $a_{i+1} \in X_i$ von minimalen Gewicht und setze $A_{i+1} = A_i \cup \{a_{i+1}\}$. Iteriere (2).

Aufgabe 2

Sei $G = (E, V)$ ein Graph und bezeichne $\mathcal{W}$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder von G. Zeigen Sie, daß $\mathcal{M} = (K, \mathcal{W})$ ein Matroid ist und folgern Sie, daß Kruskal's Algorithmus korrekt ist.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph. Zeigen Sie: Jeder Spannwald für G enthält genau $n - c$ Kanten, wobei c die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G ist.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, zusammenhängender Graph G mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$, und es gelte, daß nicht alle Spannbäume von G das gleiche Gewicht haben.

(*i*) Sei T ein minimaler Spannbaum von G. Zeigen Sie, daß es Kanten $\{u,v\} \in T$ und $\{x,y\} \notin T$ gibt, so daß $T \setminus \{\{u,v\}\} \cup \{\{x,y\}\}$ ein zweitbester Spannbaum von G ist. Dabei ist ein zweitbester Spannbaum ein Spannbaum, dessen Gewicht echt größer als das eines minimalen Spannbaums, aber minimal mit dieser Eigenschaft ist.

(*ii*) Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der einen zweitbesten Spannbaum von G berechnet.