Korrektur zur Übung am 13.12.2000

Sei $r = [r_0, r_1, \ldots, r_7] = [40, 60, 50, 70, 40, 70, 60, 60]$. Gegeben sind 7 Matritzen $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$, wobei M_i eine $r_{i-1} \times r_i$ Matrix ist.

Wie müssen die Matrizen geklammert werden, damit die Anzahl der Multiplikationen minimal wird ?

Die entsprechende Matrix kl sieht wie folgt aus

$$kl = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $kl[i,j]$ gibt die Position der äussersten Klammer an, um die Anzahl der Multiplikationen von $M_i \cdot M_{i+1} \cdot \ldots M_j$ zu minimieren, z.B., $kl[2,7] = 4$, also ist die äussere Klammer von

$$M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$$

wie folgt.

$$(M_2 \cdot M_3 \cdot M_4)\,(M_5 \cdot M_6 \cdot M_7)\,.$$

Danach geht es rekursiv weiter, d.h., es wird $k[2,4]$ und $k[5,7]$ betrachtet, usw...
Um das Produkt

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$$

optimal zu klammern, betrachten wir zuerst $kl[1,7] = 4$. Das Produkt zerfällt in 2 Teile:

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4)\,(M_5 \cdot M_6 \cdot M_7)$$

Für $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4$ folgt aus $k[1,4] = 2$

$$(M_1 \cdot M_2)\,(\cdot M_3 \cdot M_4)$$

$k[3,4] = 3$ führt zu der Klammerung $(M_1 \cdot M_2)\,((\cdot M_3)(M_4))$. Das Produkt $M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$ wird wegen $k[5,7] = 6$ wie folgt geklammert $(M_5 \cdot M_6)(M_7)$. Insgesamt ergibt sich asl optimale Klammerung

$$((M_1 \cdot M_2)(M_3 \cdot M_4))\,((M_5 \cdot M_6) \cdot M_7)$$

Die in der Übung angegeben Klammerung

$$(((M_1 \cdot M_2) \cdot M_3) \cdot M_4)\,((M_5 \cdot M_6) \cdot M_7)$$

ist falsch (die Klammerung von M_3 ist nicht korrekt).