Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2001
Übungsblatt 3
17. Mai 2001

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Sie besitzen eine Münze, die mit WS p Zahl zeigt und mit WS $q = (1 - p)$ Kopf. Diese Münze wird wiederholt geworfen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die man braucht, bis zum ersten Mal Zahl erscheint.

Berechnen sie die diskrete Dichte von X und fertigen Sie eine Skizze an für den Fall $p = 1/2$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\text{Var}[X]$.

Aufgabe 2

(**Coupon Collector Problem**) Ein Kind kauft jeden Tag ein Pokemonbildchen in verschlossenem Umschlag. Wir nehmen an, daß alle n Pokemons gleich häufig vorkommen. Die Zufallsvariable T zählt die Zahl der Tage, bis das Kind alle Pokemons besitzt. Was ist $\mathbb{E}[T]$?

[Tip: Teilen Sie die Zeit in Phasen auf, die jeweils aus der Anzahl Tage bestehen, die nach dem Finden des $(i-1)$-ten Pokemons bis zum Finden des i-ten vergehen, also $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$. Mit welcher WS erhält das Kind ein neues Pokemon, wenn es schon $i-1$ besitzt? Wie lange dauert also die i-te Phase im Mittel? Verwenden Sie das Ergebnis aus der ersten Aufgabe.]

Aufgabe 3

Wir betrachten die Summen a) $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und b) $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i = n\tilde{X}_1$.

Dabei sind die X_i und $\tilde{X}_i$ jeweils 0/1-ZV mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Im Fall a) sind alle X_i unabhängig, im Fall b) sind alle gleich. Anschaulich bedeutet letzteres, daß das erste 'Zufallsbit' $\tilde{X}_1$ ausgewürfelt wird, und alle anderen $\tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \ldots$ genau dasselbe tun wie das erste.

Skizzieren Sie die diskreten Dichten f_X und $f_{\tilde{X}}$ für den Fall $n = 4$. Berechnen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz von X und $\tilde{X}$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie nochmals das Geburtstagsproblem. Was ist der Erwartungswert der Anzahl X von Paaren (von Gästen), die am selben Tag Geburtstag haben in Abhängigkeit von n, der Anzahl von Personen? [Tip: Schreiben Sie X als eine geeignete Summe von 0/1-Zufallsvariablen.] Kann man die Varianz dieser Größe leicht ausrechen? Begründen Sie Ihre Antwort.