Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2001
Übungsblatt 4
31. Mai 2001

Diskrete Strukturen II

Abgabe am 7. Juni 2001 vor der Zentralübung.

Aufgabe 1

In einem Parallelrechner mit n Prozessoren und n Speicherzellen sende jeder Prozessor zugleich eine Anfrage unabhängig und gleichverteilt an eine Speicherzelle. Jede Speicherzelle kann genau eine Anfrage bedienen. Falls eine Speicherzelle von mehr als einem Prozessor gleichzeitig angefragt wird, so wird keine der Anfragen beantwortet. Sei X die Anzahl der Prozessoren, die ihre Anfrage beantwortet bekommen. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$. Was geschieht für $n \to \infty$?

Aufgabe 2

Sei $X_n \sim b(\cdot;\ n, 5/n)$ und $Y \sim \mathrm{Po}_5(\cdot)$, also $f_{X_n}(x) = b(x;\ n, 5/n)$ und $f_Y(x) = \mathrm{Po}_5(x)$.

Was ist $\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(k) - f_Y(k)$?
(Benutzen Sie $\frac{n!}{(n-x)!} = n^x(1 + o(1))$ und $\lim_{n\to\infty}(1 - c/n)^n = e^{-c}$.)

Berechnen Sie $f_{X_6}(k) - f_Y(k)$ und $f_{X_{12}}(k) - f_Y(k)$, jeweils für $k = 0, 1, 2, 3$

Aufgabe 3

Seien X und Y zwei[1] (diskrete) Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen W-Raum Ω[2] mit Wertebereichen W_X und W_Y. Für alle W-theoretischen Fragen, die wir uns im Zusammenhang mit X und Y stellen können, reicht es, $\Omega' := W_X \times W_Y$ zu betrachten. Wahrscheinlichkeiten werden festgelegt durch die *gemeinsame diskrete Dichte* $f_{X,Y}(x, y) = \Pr[(X, Y) = (x, y)]$. Wir können dann o.E. annehmen, daß $X : (x, y) \mapsto x$ und $Y : (x, y) \mapsto y$. In der gemeinsamen diskrete Dichte sind sowohl die Verteilungen der einzelnen ZV, als auch ihre Abhängigkeitsstruktur kodiert.

a) Seien X, Y zwei gemäß $b(\cdot;\ 3, 1/2)$ binomialverteilte Zufallsvariablen. Skizzieren Sie die gemeinsame diskrete Dichte auf $\Omega' := \{0, 1, 2, 3\}^2$ (etwa als Histogramm oder in Form einer 4×4-Matrix) für den Fall, daß X und Y starr korreliert sind (also $X \equiv Y$), und für den Fall, daß X und Y unabhängig sind. Kennzeichnen Sie jeweils das Ereignis '$X + Y = 2$' in $\Omega' := \{0, 1, 2, 3\}^2$, geben Sie seine WS an und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Formel für die Summe von unabhängigen ZV aus der Vorlesung.

[1] Ähnliches gilt für mehr als zwei Zufallvariablen.

[2] Man stelle sich etwa vor, Ω sei das 'politisch-ökonomische Weltgeschehen' und X, Y die Kurse zweier bestimmter Wertpapiere zu einem festen Zeitpunkt. Selbst wenn wir annehmen, daß es prinzipiell möglich ist, ein solches Ω zu formulieren, so ist dieses für praktische Berechnungen sicherlich unzugänglich und viel zu komplex.

b) Sei nun ähnlich wie in b) die ZV $X \sim b(\cdot;\ 3, 1/2)$ und Y gegeben, wobei $Y = X + Z$, und Z eine Bernoulli-verteilte ZV mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1/2$ ist. Bestimmen Sie $\Omega' := W_X \times W_Y$ und skizzieren Sie wie in b) die gemeinsame diskrete Dichte.

Aufgabe 4

Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit jeweils endlicher Varianz.

1. Zeigen Sie, daß gilt $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

2. Die rechte Seite der obigen Gleichung heißt auch die *Kovarianz* $Cov(X, Y)$ *von* X *und* Y. Zeigen Sie, daß die Kovarianz 0 ist, wenn X und Y (paarweise) unabhängig sind.

3. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Cov}(X, X) = Var(X)$, und daß $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$. Seien nun X und Y nicht mehr unbedingt unabhängig, aber die Zahlenwerte $\mathrm{Var}[X], \mathrm{Var}[Y]$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$ bekannt. Berechnen Sie damit $\mathrm{Var}[X + Y]$.