Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 1999
Übungsblatt 5
7. Juni 2001

Diskrete Strukturen II

Abgabe bis zum 21. Juni 2001, 10:00 vor der Zentralübung.

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, daß alle zu betrachtenden Zufallvariablen Poisson-verteilt sind.

a) Zwei Call-Center fusionieren. Das eine hatte vor der Fusion durchschnittlich 30 Anfragen pro Minute, das andere 20. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Fusion höchstens 100 Anrufe pro Stunde ankommen?

b) Ein seltener Computerfehler tritt durchschnittlich einmal im Jahr auf. Wie wahrscheinlich ist es, daß derselbe Fehler mehr als einmal am selben Tag auftritt?

Aufgabe 2

Diese Aufgabe soll ein Gefühl für die *Güte* der Chebychev-Ungleichung vermitteln.
Betrachten Sie $X \sim b(\cdot;\ 100, 1/2)$.

a) Berechnen Sie $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 11]$ exakt (Maple o.ä. verwenden!) sowie die obere Schranke für denselben Ausdruck, den man durch die Chebychev-Ungleichung erhält.

b) Wiederholen Sie die Rechnungen für $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 51]$.

Aufgabe 3

Wir betrachten einen zufälligen Graphen $G \in \mathcal{G}_{n,\frac{c}{n-1}}$. Es werden also alle Kanten des vollständigen Graphen K_n jeweils unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{c}{n-1}$ markiert. Darauf werden alle unmarkierten Kanten entfernt.
Sei X die Anzahl aller K_4's, die in G als knoteninduzierte Subgraphen enthalten sind.

a) Schreiben Sie X als die geeignete Summe von Indikatorvariablen.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und schätzen Sie mit der Markovungleichung die WS (von oben) ab, daß $X \geq 1$, daß man also mindestens einen K_4 in G findet.

c) Beweisen Sie mit der obigen Rechnung, daß die WS, überhaupt einen K_4 zu finden, mit $n \to \infty$ gegen Null geht.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, daß die Markovungleichung in folgendem Sinne scharf ist. Geben Sie für jedes $t \in \mathbb{N}$ jeweils eine Dichte auf $\mathbb{N}_0$ an, so daß für eine Zufallsvariable X mit dieser Dichte gilt:

$$\Pr[X \geq t] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

b) Sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei die X_i jeweils Bernoulli-ZV mit Erfolgswahrscheinlichkeiten p_i sind. Für die p_i's soll die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n} p_i = np\,[= \mathbb{E}[X]]$ gelten.

Zeigen Sie, daß die Varianz von X maximal ist, wenn alle p_i's gleich sind.[1]

[1] Diese Teilaufgabe ist etwas anspruchsvoller, man verwendet wohl am besten die Cauchy–Schwarz–Ungleichung.