Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2001
Übungsblatt 6
21. Juni 2001

Diskrete Strukturen II

Abgabe bis zum 28. Juni, 10:00.

Aufgabe 1

Sei wie in der Vorlesung $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ eine Summe von unabhängigen 0/1 Zufallsvariablen X_i mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$, so daß $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i =: \mu$.

Beweisen Sie die folgende Chernoff–Schranke für den linken *Tail* der Verteilung von X, nämlich daß

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu},$$

für $0 \leq \delta \leq 1$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß für alle $0 \leq \delta < 1$ gilt:
a) $(1-\delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta+\delta^2/2}$.
b) $(1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta+\delta^2/3}$.

Fertigen Sie zunächst für jede Ungleichung jeweils einen Plot der linken und rechten Seiten als Funktion von δ an, beispielsweise mit Maple.

(Tip: Es gilt
$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \ln(f(x)) - \ln(g(x)) \geq 0$,
$1 - x \leq e^{-x}$ f.a. $x \in \mathbb{R}$
und $1 + x \geq e^{\frac{2}{3}x}$ f.a. $0 \leq x \leq 1.14$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Aus der Chernoff-Ungleichung in ihrer allgemeinsten Form kann (u.a. mit den in der letzten Aufgabe bewiesenen Ungleichungen) eine ganze Familie von nur unwesentlich schwächeren Ungleichungen hergeleitet werden. Diese Ungleichungen erleichtern oft Anwendungen der Chernoff-Ungleichung - es müssen aber die jeweiligen Voraussetzungen gegeben sein!
Beweisen Sie

1. $\Pr[X - \mu \geq \delta\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$ für $0 \leq \delta \leq 1$.
2. $\Pr[\mu - X \geq \delta\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ für $0 \leq \delta \leq 1$.
3. $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2 \cdot e^{-\mu\delta^2/3}$ für $0 \leq \delta \leq 1$.
4. $\Pr[X - \mu \geq \delta\mu] \leq (\frac{e}{1+\delta})^{(1+\delta)\mu}$.
5. $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mu$.

(Tip: Nur für 1. bis 3. muß man das Ergebnis aus der letzten Aufgabe benutzen, der Rest kann direkt aus der ursprünglichen Chernoff-Ungleichung gefolgert werden.)

Aufgabe 4

Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $t \mapsto \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$, wenn
a) X Bernoulli-verteilt ist, mit $\mathbb{E}[X] = p$,
b) X binomialverteilt ist, mit Parametern m und p/m (für ein festes $m \in \mathbb{N}$),
c) X Poisson-verteilt ist, mit $\mathbb{E}[X] = p$.

Vergleichen Sie die drei Ergebnisse und finden Sie eine gemeinsame obere Schranke als Funktion von p. (Tip: Beweis der Chernoff-Ungleichung! Verwenden Sie $1 - x \leq e^{-x}$.)

Überzeugen Sie sich nun, daß man am Beweis der Chernoff-Ungleichung praktisch nichts verändern muss, wenn die X_i in der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$ nicht mehr Bernoulli-verteilt sein sollen (mit Erwartungswerten p_i), sondern binomialverteilt (mit Parametern m_i und p_i/m_i) oder Poisson-verteilt (mit $\mathbb{E}[X_i] = p_i$).