Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2001
Übungsblatt 7
28. Juni 2001

Diskrete Strukturen II

Abgabe bis zum 5. Juli 2001, 10:00.

Aufgabe 1

Betrachten Sie einen Random Walk auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$. Ein Zufallsspaziergänger befinde sich zur Zeit $t = 0$ bei $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots X_d^{(0)}) = (0, 0, \dots, 0)$.
Wenn er zur Zeit t an der Stelle $(X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \dots, X_d^{(t)})$ ist,
würfelt er sich einen Zufallsvektor $(Y_1^{(t)}, Y_2^{(t)}, \dots, Y_d^{(t)})$ gleichverteilt in $\{+1, -1\}^d$.
Dann geht er an die Stelle $(X_1^{(t)} + Y_1^{(t)}, X_2^{(t)} + Y_2^{(t)}, \dots, X_d^{(t)} + Y_d^{(t)})$.

a) Nehmen Sie zunächst $d = 1$ an. Wir betrachten im wesentlichen eine Folge $(Y_1^{(t)})_{t \geq 0}$ von Zufallsbits, den Index 1 können wir hier weglassen, da es sowieso nur eine Dimension gibt. Begründen Sie, daß

$$\Pr[\text{Spaziergänger ist zur Zeit } k \text{ am Nullpunkt}] = \begin{cases} \binom{k}{k/2} 2^{-k} & k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Begründen Sie, warum die Verallgemeinerung auf $d > 1$ lautet

$$\Pr[\text{Spaziergänger ist zur Zeit } k \text{ am Nullpunkt}] = \begin{cases} \left(\binom{k}{k/2} 2^{-k}\right)^d & k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) Seien die H_k's die Ereignisse 'Spaziergänger ist zur Zeit k am Nullpunkt', deren Wahrscheinlichkeiten wir eben berechnet haben. Sicherlich sind die H_k's nicht disjunkt, aber wir wissen, daß das Ereignis 'Spaziergänger kommt zur Null zurück' gleich $\bigcup_{k \geq 1} H_k$ ist. Verwenden Sie die Boolesche Ungleichung (und ggf. Maple), um zu zeigen, daß für $d = 3$ der Spaziergänger nicht mit Wahrscheinlichkeit eins zum Ursprung zurückkehrt.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß für $d = 1, 2$ der Spaziergänger sicher zur Null zurückkommt, aber für $d \geq 3$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit echt kleiner eins.

Aufgabe 2

Sei X standardnormalverteilt, i.e.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Für die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int_{t=-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

gibt es keinen geschlossenen Ausdruck, dennoch kann Maple damit rechnen. Geben Sie in Maple folgendes ein und plotten Sie das Ergebnis:
`>int(sqrt(1/2/Pi)*exp(-t^2/2),t=-infinity..x);`.
Schreiben Sie ein Maple-Worksheet, mit dem Sie eine beliebig lange Folge von standard-normalverteilten Werten erzeugen können.
Tip: Mit der Zeile
`>a:=rand(1..100000)/100000.;`
definieren Sie eine Funktion die in $[0,1]$ annähernd gleichverteilte Werte liefert. Jedes mal, wenn Sie
`>a();`
eingeben, oder auch einen komplizierteren Ausdruck, der '`a()`' enthält, wird der Wert neu ausgewürfelt. Verwenden Sie das Kommando '`solve`'!

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X heißt log–normalverteilt mit Parametern $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $\mu \in \mathbb{R}$, wenn sie folgende Dichte hat:

$$f_X(x) = f(x;\ \mu, \sigma^2) := \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/(2\sigma^2)(\ln(x)-\mu)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $Y := \ln X$ normalverteilt ist gemäß $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wenn X log–normalverteilt wie oben ist. Das erklärt den Namen 'log–normalverteilt'.

Aufgabe 4

Wir betrachten einen Parallelrechner mit k Prozessoren. Auf alle k Prozessoren werden Jobs gelegt, deren Laufzeiten X_k exponentialverteilt sind, i.e.

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir interessieren uns jetzt naturgemäß für

$$\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$$

und mehr noch für

$$\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\},$$

also für die Zeitspanne, für die der Parallelrechner belegt ist.
Berechnen Sie die Verteilungfunktionen des Minumums und des Maximums. Betrachten Sie zunächst den Fall $k = 2$. Um wieviel verringert sich der Erwartungswert des Minimums von k Laufzeiten gegenüber dem Erwartungwert einer einzelnen Laufzeit, wenn alle λ_i's gleich sind?