$\boxed{\textsc{Max3Sat}}$

Gegeben: Boolesche Formel in konj. Normalform mit genau drei Literalen pro Klausel.

Gesucht: Belegung für die möglichst viele Klauseln erfüllt sind.

Rand. Alg.: Wähle für jede Variable x_i eine Belegung $\in \{\textsc{True}, \textsc{False}\}$ zufällig.

X := Anzahl erfüllter Klauseln:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\text{Klauseln } C} \mathbb{E}[X_C] = \sum_{\text{Klauseln } C} \text{Prob}[C \text{ erfüllt}] = \sum_{\text{Klauseln } C} \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \cdot \text{\# Klauseln.}$$

Håstad '97: Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ so gilt:

$\forall \epsilon > 0$ gibt es keinen determ. Alg., der immer eine Belegung findet, die mind. $(\frac{7}{8} + \epsilon) \cdot$ # Klauseln viele Klauseln erfüllt.

MAX3SAT – Determ. Algorithmus

for $i := 1$ **to** n **do**

  if $\mathbb{E}[X \mid x_1 = q_1, \ldots, x_{i-1} = q_{i-1}, x_i = 1]$

    $\geq \mathbb{E}[X \mid x_1 = q_1, \ldots, x_{i-1} = q_{i-1}, x_i = 0]$ **then**

    $q_i := 1$

  else

    $q_i := 0$

od

Methode der bedingten Erwartungswerte

Gegeben: Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) mit $\Omega = \{0,1\}^n$ und $p(\omega) = \frac{1}{2^n}$ für alle $\omega \in \Omega$ und Ereignisse $A_1, \ldots, A_s$ mit $\sum_{i=1}^{s} \text{Prob}[A_i] = k$.

Gesucht: Ein $\omega \in \Omega$ für das höchstens (mindestens) k der s Ereignisse A_i eintreffen.

Algorithmus: Für $i = 1, \ldots, n$ wähle α_i sukzessive jeweils so, daß

$$\sum_{j=1}^{s} \text{Prob}[A_j \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_i]$$

minimal (maximal) ist.

Pessimistische Schätzer

Da bedingte Erwartungswerte oft schwer zu berechnen sind, führte Raghavan 1987 statt dessen sogenannte *pessimistische Schätzer* ein:

Funktionen $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$ mit

- alle $f_j : \{0,1\}^j \to \mathbb{R}$ lassen sich effizient berechnen und
- für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$f_{j-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}) \geq \min\{f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 0), f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 1)\}$$

  und

$$f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \geq \sum_{i=1}^{s} \text{Prob}[A_i \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_j].$$

Man kann zeigen: Verwendet man im Algorithmus die pessimistischen Schätzer (bei Minimierungsproblemen bzw analog definierte optimistische Schätzer bei Maximierungsproblemen) anstelle der bedingten Erwartungswerte, so erhält man ebenfalls ein Ergebnis, das mindestens so gut ist wie der Erwartungswert.

Kantenfärbung des K_n

Für $K \subseteq K_n$, $K \sim K_4$ setzen wir

$$w(K) = \begin{cases} 0, & K \text{ enthält eine rote \underline{und} eine blau Kante} \\ 2^{-5}, & K \text{ enthält keine gefärbte Kante} \\ 2^{r-6}, & K \text{ enthält genau } r \text{ gefärbte Kanten, alle in der gleichen Farbe} \end{cases}$$

$$W(K_n) = \sum_{\substack{K \subseteq K_n \\ K \sim K_4}} w(K).$$

$\textsc{Color-Edges}\,(P, x)$;

```
Ordne die Kantenmenge E des K_n beliebig: E = {e_1, ..., e_(n choose 2)};
for i := 1 to (n choose 2) do
    Berechne Gewicht W_rot und W_blau des K_n, falls die Kante e_i rot bzw. blau gefärbt wird;
    if W_rot ≤ W_blau then
        Färbe e_i rot;
    else
        Färbe e_i blau;
```

Methode der k-fach unabhängigen Erwartungswerte

Gegeben: Unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Prob$[X_i = 0] =$ Prob$[X_i = 1] = \frac{1}{2}$, eine Funktion $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ und eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, so daß

$$\text{Prob}[g(X_1, \ldots, X_n) \in A] > 0. \qquad (*)$$

Gesucht: Ein $\omega \in \{0,1\}^n$ mit $g(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A$.

Vorgehensweise: Zeige zunächst, daß es eine Konstante k gibt, so daß im Beweis von $(*)$ nur verwendet wird, daß die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ k-fach unabhängig sind (oder modifiziere den Beweis entsprechend).

Verwende statt der ursprünglich gegebenen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ die entsprechend Satz dem Satz der Vorlesung konstruierten Variablen und teste alle Elemente des Wahrscheinlichkeitsraums $\{0,1\}^t$ (der Größe $n^{\lfloor k/2 \rfloor} = poly(n)$) nach einem Element $\tilde{\omega} \in \{0,1\}$ mit $g(X_1(\tilde{\omega}), \ldots, X_n(\tilde{\omega})) \in A$.

Lattice Approximation Problem

Gegeben: $n \times r$ Matrix $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} \in [0, 1]$.
Vektor $r \in \mathbb{R}^r$.

Gesucht: $q \in \mathbb{Z}^r$ mit

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta_i| \stackrel{!}{=} \text{minimal},$$

wobei

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}(p_j - q_j) \qquad (= i\text{-te Komponente von } Cp - Cq).$$

:Bem.: O.E. ist $p_i \in [0, 1]$. (Ansonsten betrachte statt p_i den Wert $p_i - \lfloor p_i \rfloor$.)

Wdh.: Allg. Chernoff Schranken Seien $x_1, \ldots, X_n$ unabh. 0,1 Variable, Prob$[[]X_i = 1] = p_i$; $X := \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $\mu := \mathbb{E}[X]$. Dann gilt:

$$\text{Prob}[X \geq (1+\delta)\mu] \quad \leq \quad \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1*\delta}}\right)^\mu$$

$$\text{Prob}[X \leq (1-\delta)\mu] \quad \leq \quad \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1*\delta}}\right)^\mu .$$

Notation: $D(\mu, x) := \langle$ das δ, für das die rechte Seite der Chernoff Schranken $= x$ ist $\rangle$.

Lemma: Für alle Matrizen C und Vektoren p gibt es ein q mit

$$|\Delta_i| \; \leq \; s_i \cdot D(s_i, \frac{1}{2n}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$s_i \; := \; \sum_{j=1}^r c_{ij} p_j .$$

Methode der beinahe k-fach unabhängigen Erwartungswerte

Definition: Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ heißen (ϵ, k)*-fach unabhängig*, falls für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\left|\text{Prob}[X_{i_1} = \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k} = \alpha_{i_k}] - \prod_{j=1}^{k} \text{Prob}[X_{i_j} = \alpha_{i_j}]\right| \leq \epsilon.$$

Methode der beinahe k-fach unabhängigen Erwartungswerte

Gegeben: Unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Prob$[X_i = 0]$ = Prob$[X_i = 1] = \frac{1}{2}$, eine Funktion $g : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ und eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, so daß

$$\text{Prob}[g(X_1, \ldots, X_n) \in A] > 0. \qquad (*)$$

Gesucht: Ein $\omega \in \{0,1\}^n$ mit $g(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A$.

Vorgehensweise: Zeige zunächst, daß es Funktionen $\epsilon = \epsilon(n)$ und $k = k(n)$ gibt mit $\log \epsilon^{-1} = O(\log n)$ und $k = O(\log n)$, so daß im Beweis von $(*)$ nur verwendet wird, daß die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (ϵ, k)-fach unabhängig sind (oder modifiziere den Beweis entsprechend).

Verwende statt der ursprünglich gegebenen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ die entsprechend obigem Satz konstruierten Variablen und teste alle Elemente des Wahrscheinlichkeitsraums $\{0,1\}^t$ (der Größe $poly(n)$) nach einem Element $\tilde{\omega} \in \{0,1\}$ mit $g(X_1(\tilde{\omega}), \ldots, X_n(\tilde{\omega})) \in A$.