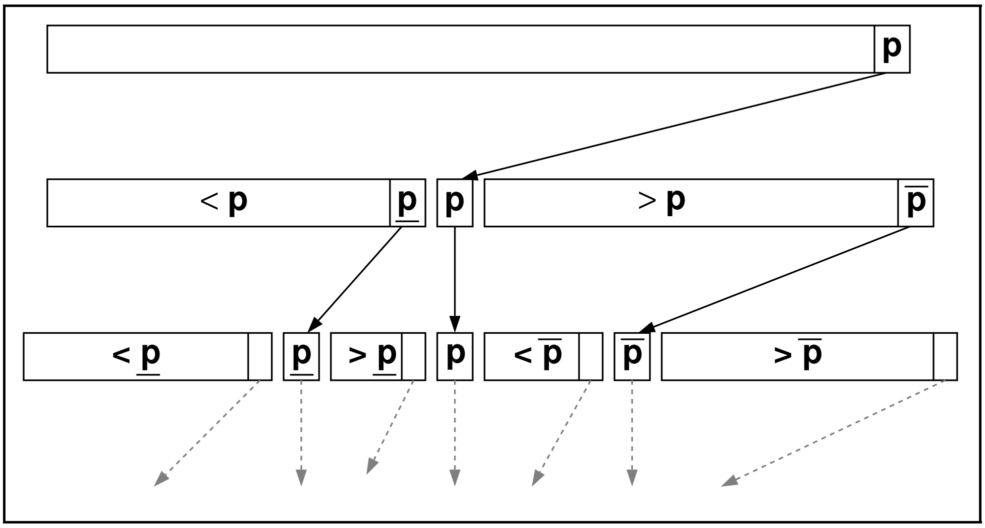
# QuickSort




**Satz:** Quicksort benötigt zum Sortieren eines Feldes der Länge $n$ maximal $\binom{n}{2}$ viele Vergleiche.

**Satz:** Quicksort benötigt zum Sortieren eines Feldes der Länge $n$ *durchschnittlich* nur $2\,n\ln(n) + O(n)$ viele Vergleiche.
**Beweis:** Z.B. mit Hilfe rekursiver Funktionen, vgl DS1-Buch.

# Random-QuickSort

**Idee:** Wähle in jedem Schritt das Pivot-Element *zufällig*.

**Satz:** Random-Quicksort benötigt zum Sortieren eines Feldes der Länge $n$ *im Erwartungswert* nur $2\,n\ln(n) + O(n)$ viele Vergleiche — egal wie die Elemente zu Beginn sortiert sind.

**Satz:** Für Random-Quicksort gilt:

$$\mathbb{E}[\#Vergleiche] = 2n \ln n + \mathcal{O}(n).$$

**Beweis:** Betrachte Zufallsvariable

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}, \quad \text{wobei}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te größtes Element mit } j\text{-te größtem} \\ & \text{verglichen wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}], \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \text{Pr}[i\text{-te und } j\text{-te größtes El. werden vergl.}], \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{1}{k} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} H_n, \quad \text{wobei } H_n = \ln n + \mathcal{O}(1) \\
&= 2n \ln n + \mathcal{O}(n).
\end{aligned}$$

**<u>Bem:</u>** Beweis läßt sich auch auf die Analyse der deterministische Variante des QuickSort übertragen.