Matrizenmultiplikation: Schulmultiplikation

Nötig sind n^3 Multiplikationen und $n^2 \cdot (n-1)$ Additionen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\forall i, j \in \{1, \dots n\} \ : c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrizenmultiplikation: 2×2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1.) Standardverfahren: $\boxed{\text{8 Multiplikationen, 4 Additionen}}$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

2.) Verfahren von Strassen: $\boxed{\text{7 Multiplikationen, 15 Additionen}^{*)}}$

$$C = \begin{pmatrix} m_2 + m_3 & m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ m_1 + m_2 + m_4 - m_7 & m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned}
m_1 &= (a_{21} + a_{22} - a_{11})(b_{22} - b_{12} + b_{11}) \\
m_2 &= a_{11}b_{11} \\
m_3 &= a_{12}b_{21} \\
m_4 &= (a_{11} - a_{21})(b_{22} - b_{12}) \\
m_5 &= (a_{21} + a_{22})(b_{12} - b_{11}) \\
m_6 &= (a_{12} - a_{21} + a_{11} - a_{22})b_{22} \\
m_7 &= a_{22}(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21})
\end{aligned}$$

*) bei Speicherung von Zwischenergebnissen

Matrizenmultiplikation nach Strassen

Vorüberlegung: O.E. dürfen wir annehmen, dass $n = 2^k$:

$$A \quad \to \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & A \end{array}\right)}_{2^{\lceil \log n \rceil}}$$

analog für B und C

Statt zweier $n \times n$ Matrizen genügt es daher zwei höchstens doppelt so große Matrizen zu multiplizieren.

Matrizenmultiplikation nach Strassen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} M_2 + m_3 & M_1 + M_2 + M_5 + M_6 \\ M_1 + M_2 + M_4 - M_7 & M_1 + M_2 + M_4 + M_5 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{21} + A_{22} - A_{11})(B_{22} - B_{12} + B_{11}) \\
M_2 &= A_{11}B_{11} \\
M_3 &= A_{12}B_{21} \\
M_4 &= (A_{11} - A_{21})(B_{22} - B_{12}) \\
M_5 &= (A_{21} + A_{22})(B_{12} - B_{11}) \\
M_6 &= (A_{12} - A_{21} + A_{11} - A_{22})B_{22} \\
M_7 &= A_{22}(B_{11} + B_{22} - B_{12} - B_{21})
\end{aligned}$$

7 Multiplikationen von Matrizen der Größe $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$,
15 Additionen von Matrizen der Größe $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.