Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Wintersemester 2001/02
Übungsblatt 8
11. Dezember 2001

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

3. Kontrollblatt !

Abgabetermin: Dienstag, den 18. Dezember 2001 (in der Übung)

Hausaufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender gewichteter Graph, mit Längenfunktion $l : E \to \mathbb{R}^+$. Weiter sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Ein *kürzester-Pfad-Baum mit Wurzel* s ist ein spannender Baum T mit der Eigenschaft, dass für alle $v \in V$ der eindeutig bestimmte s-v-Pfad in T ein kürzester s-v-Pfad in G ist. Zeigen Sie:

1. Solch ein kürzester-Pfad-Baum mit Wurzel s existiert unter den gegebenen Voraussetzungen immer.
2. Ist für alle Knoten $v \in V$ die Länge eines kürzesten s-v-Pfades gegeben, kann man einen kürzesten-Pfad-Baum mit Wurzel s in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ konstruieren.

Hausaufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit Längenfunktion $l : E \to \mathbb{R}^+$ und eine (nichtleere) Knotenmenge $X \subset V$. Gesucht ist eine Funktion $p : V \to X$, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$p(v) = x \Longrightarrow \forall x' \in X : dist(v, x) \leq dist(v, x')$$

wobei $dist(u, v)$ die Länge eines kürzesten u-v-Pfades bezeichne.
Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der dieses Problem in Laufzeit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ löst.

Hausaufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Graph $G(V, E)$ mit Längenfunktion $l : E \to \mathbb{R}^+$ und zwei Knoten x und y. Gesucht ist ein *längster* x-y-Pfad (wobei in einem Pfad kein Knoten mehr als einmal besucht werden darf.)
Zeigen Sie, dass dieses Problem NP-schwer ist, indem Sie *eines* der drei folgenden NP-vollständigen Probleme auf das gegebene Problem reduzieren.

- 3-Färbbarkeit (3-Colorability)
- Erfüllbarkeit (Satisfiability)
- Hamiltonscher Kreis (Hamiltonian Circuit)

Hausaufgabe 4 (8 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Baum $T = (V, E)$ und eine Längenfunktion $l : E \to \mathbb{R}$. Gesucht sind zwei Knoten $x, y \in V$ deren Abstand (d.h. die Länge eines kürzesten x-y-Pfades) maximal ist.
Beschreiben Sie einen Algorithmus, der die beiden Knoten x und y, den Abstand von x und y und den kürzesten x-y-Pfad in insgesamt $O(n)$ Laufzeit bestimmt.

Hausaufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben Sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Längenfunktion $l : V \to \mathbb{R}$. Sei $n := |V|$ und $m := |E|$ In der Vorlesung wurde erklärt wie man den Algorithmus von Bellman und Ford dazu verwenden kann, um die Existenz von negativen Kreisen zu erkennen. Beweisen Sie die Korrektheit dieser Modifikation, indem Sie zeigen:

1. In einem Graphen ohne negative Kreise gilt:

$$\forall v \in V : B_n[v] \geq B_{n-1}[v]$$

2. Gibt es einen negativen Kreis in G, so gilt:

$$\exists v \in V : B_n[v] < B_{n-1}[v]$$