Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2001/02
Übungsblatt 1
19. Oktober 2001

Komplexitätstheorie

Abgabe am 26. Oktober 2001 in der Vorlesung!

Aufgabe 1

Wie verhalten sich die folgenden Funktionen in ihrem Wachstumsverhalten zueinander (immer als Funktionen von $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ betrachtet):

1. n
2. $\lceil 1/e \rceil$
3. $\sin(n\pi)$
4. $n\sin(n\pi)$
5. $n|\sin(\frac{n\pi}{2})|$
6. $\log^*(n)$
7. $\lceil 2^{\sqrt{\log^*(n)}} \rceil$
8. $\lceil n^{\frac{1}{n}} \rceil$
9. $\lceil (n!)^{\frac{1}{n}} \rceil$

Geben Sie Ihre Antworten mit Hilfe der Landau-Symbole an.

Aufgabe 2

(a) Seien $p(n)$ und $q(n)$ zwei Polynome über $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $p = O(q)$ genau dann, wenn der Grad von p kleiner oder gleich dem Grad von q ist.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige, schwach monoton wachsende, aber nicht schließlich konstante Funktion, d.h. $f(n+1) \geq f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $f(n+k) > f(n)$ ist. Zeigen Sie, dass $f(n)^{\log(n)}$ superpolynomial ist, d.h.:
Für jedes $d \in \mathbb{N}$ gilt: $n^d = O(f(n)^{\log(n)})$, aber $f(n) \neq O(1)$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie eine Turingmaschine, die ein zweidimensionales Band zur Verfügung hat, d.h. der Schreib-/Lesekopf kann sich — ähnlich wie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem — auch nach oben und nach unten bewegen.

(a) Beschreiben Sie die Überführungsfunktion einer solchen Turingmaschine.

(b) Zeigen Sie, wie eine solche zweidimensionale Turingmaschine mit einer herkömmlichen Turingmaschine simuliert werden kann.

Aufgabe 4

Geben Sie eine möglichst "natürliche" Bijektion

$$b : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$$

an und bestimmen Sie $|b(n)|$.
Was ist die größte asymptotische untere Schranke für die Länge von $b(n)$, wenn b bijektiv, aber sonst beliebig gewählt ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.