Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2001/02
Übungsblatt 10
21. Dezember 2001

Komplexitätstheorie

Abgabetermin: Freitag, 11. Januar 2002, in der Vorlesung

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe soll eine nützliche alternative Charakterisierung von $\mathcal{NP}$ erarbeitet werden. Zuerst einige Definitionen:
Eine binäre Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ heißt *polynomiell entscheidbar*, falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die die Sprache $\{\langle x, y\rangle;\ (x, y) \in R\}$ in polynomieller Zeit entscheidet. Wir sagen, dass R *polynomiell ausgewogen* ist, falls ein Polynom p existiert mit $|y| \le p(|x|)$ für alle $(x, y) \in R$.
Zeigen Sie nun die folgende Aussage: Für alle Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ gilt: $L \in \mathcal{NP}$ genau dann, wenn eine polynomiell entscheidbare, polynomiell ausgewogene binäre Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ existiert, so dass

$$L = \{x;\ \exists y : (x, y) \in R\}.$$

Bemerkung: Der String y in der obigen Chrakterisierung von L heißt auch *Zertifikat* oder *Witness*. Er hat polynomielle Länge in $|x|$. Man kann den String y wie folgt sehen: Er ist ein kurzer (d.h. polynomiell langer) Beweis der Tatsache, dass der Input x in der Sprache L liegt, der deterministisch in kurzer (d.h. polynomieller) Zeit auf seine Gültigkeit hin überprüft werden kann (z.B. von der Turingmaschine, die die Relation R entscheidet).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}/\text{poly})/\text{poly} = \mathcal{P}/\text{poly}$.

Aufgabe 3

Eine *starke nichtdeterministische Turingmaschine* ist eine nichtdeterministische Turingmaschine mit drei Endkonfigurationen: ´ja´, ´nein´ und ´vielleicht´. Eine solche Maschine entscheidet eine Sprache L, falls folgendes gilt: Falls $x \in L$, dann enden alle Berechnungspfade mit ´ja´ oder ´vielleicht´, allerdings mindestens einer mit ´ja´. Falls $x \notin L$, dann enden alle Berechnungspfade mit ´nein´ oder ´vielleicht´, allerdings mindestens einer mit ´nein´.
Zeigen Sie, dass für jede Sprache L gilt: L wird von einer starken nichtdeterministischen Turingmaschine entschieden genau dann, wenn $L \in \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Sprache L gilt:

$$\mathcal{NP}^L = \mathcal{NP} \Longleftrightarrow L \in \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Simulationstechnik für Orakelfragen durch nichtdeterministische Maschinen aus dem Beweis von Aufgabe 2 Blatt 8.