Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2001/02
Übungsblatt 7
30. November 2001

Komplexitätstheorie

Abgabetermin: Freitag, 7. Dezember 2001, in der Vorlesung

Aufgabe 1

Die *polynomielle nichtdeterministische many − one − Reduzierbarkeit* $\leq_m^{NP}$ ist wie folgt definiert: $A \leq_m^{NP} B$ genau dann, wenn es eine nichtdeterministische polynomialzeit Turingmaschine M mit Ausgabeband gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$x \in A \Longleftrightarrow$ Es gibt einen Berechnungspfad von M, der auf Eingabe x eine Ausgabe y mit $y \in B$ produziert.

Zeigen Sie, dass die polynomielle nichtdeterministische many-one Reduzierbarkeit folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\leq_m^{NP}$ ist eine Präordnung, d.h. eine transitive und reflexive Relation.
2. Für alle Sprachen A, B gilt: $A \leq_m^{NP} A \oplus B$ und $B \leq_m^{NP} A \oplus B$.
3. Für alle Sprachen A, B, C gilt: Falls $A \leq_m^{NP} B$ und $B \leq_m^{NP} C$, dann gilt $A \oplus B \leq_m^{NP} C$.

Aufgabe 2

Es seien $t_1 \leq t_2$ monotone zeitkonstruierbare Schranken, $id \leq f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_l$ sei eine Folge zeitkonstruierbarer Funktionen mit $id(n) = n$ für alle n, und

$$t_1 \circ f_i \leq t_2 \circ f_{i-1} \ \ \forall\ 0 < i \leq l.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{DTIME}(t_1 \circ f_0) \subsetneq \mathrm{DTIME}(t_2 \circ f_l) \Longrightarrow \mathrm{DTIME}(t_1) \subsetneq \mathrm{DTIME}(t_2).$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie unter Verwendung der letzten Aufgabe, dass für beliebiges $k \geq 1$ und $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mathrm{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^k \cdot \log^\epsilon).$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie die folgende Aussage: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ liegt in $\mathcal{NP}$ genau dann, wenn es eine in polynomieller Zeit berechenbare, honest Funktion f gibt, so dass gilt:

$$f(\Sigma^*) = L.$$