Lineare Programmierung – Definitionen

Eine **Hyperebene** (im $\mathbb{R}^n$) ist ein affiner Unterraum der Dimension $n-1$:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\} \qquad\qquad (a \in R^n, b \in \mathbb{R}).$$

Jede Hyperebene induziert zwei abgeschlossene Halbräume:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}.$$

Ein **Polyeder** ist der Schnitt von endlich vielen Halbräumen:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq b_1, \ldots, a_m^T x \leq b_m\}.$$

Ein **Polytop** ist ein beschränktes, nichtleeres Polyeder.

Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls gilt:

$$x, y \in S \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in S \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Lineare Programmierung – Definitionen (2)

Ist S eine konvexe Menge, dann heißt ein Punkte $x \in S$ eine **Ecke** genau dann, wenn gilt:

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = z.$$

Satz: (Charakterisierung von Ecken)

Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \leq b\}$, wobei M eine $r \times n$ Matrix mit $r > n$ sei. Dann gilt:
$x_0 \in S$ ist genau dann eine Ecke, wenn es eine reguläre Teilmatrix M^* von M gibt mit
$M^* x_0 = t^*$ (d.h. es gibt n linear unabhängige Zeilenvektoren für die Gleichheit gilt).

Standardproblem der linearen Programmierung

$$(P) \qquad \begin{array}{rcl} \min & c^T x & \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

wobei A eine $m \times n$ Matrix mit $m \leq n$ und Rang m ist.

Als **(zulässige) Lösungen** bezeichnet man Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ für die $Ax = b$ und $x \geq 0$ gilt.
Eine **optimale** Lösung ist eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ für die gilt:

$$c^T x_0 = \min\{c^T x \mid x \text{ Lösung}\}.$$

Korollar:
Für jedes Standardproblem (P) gilt:
Eine Lösung x_0 ist genau dann eine Ecke von $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, wenn die zu den positiven Komponenten von x_0 gehörenden Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

Standardproblem der linearen Programmierung: Basislösungen

Eine Lösung x heißt **Basislösung**, falls die zu den positiven Komponenten von x gehörenden Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind.

Umgekehrt gilt entsprechend: Jede reguläre $m \times m$ Teilmatrix B von A entspricht einer Basislösung $x = (x_B, x_N)$ mit $x_B = B^{-1}b$ und $x_N = 0$ (ggf. nach Umsortierung der Komponenten!).

Die den Spalten von B entsprechenden Komponenten von x nennt man die **Basisvariable** (von x).

Satz: (Fundamentalsatz der linearen Programmierung)
Für jedes Standardproblem (P) gilt:

1. Gibt es eine zulässige Lösung, so gibt es auch eine zulässige Basislösung.

2. Gibt es eine optimale Lösung, so gibt es auch eine optimale Basislösung.