Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 1
16. April 2002

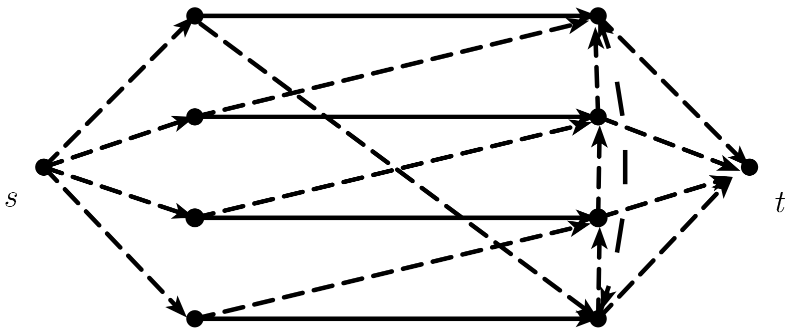
Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

Für $\boxed{r := \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\simeq 0,6)}$ gilt die Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} =: \sigma$$

Betrachte folgendes Netzwerk:



Die gestrichelt gezeichneten Kanten haben alle die Kapazität σ, die anderen, von oben nach unten, die Kapazität r^0, r^1, r^2 und r^3.
a)Bestimme den maximalen Fluß von s nach t.
b)*Zeige:* Es gibt eine Folge von augmentierenden Pfaden, so daß die Ford/Fulkerson-Methode versagt, denn die zugehörigen Flußwerte konvergieren von unten gegen einen Wert, der echt kleiner als der maximale Fluß ist. [TIP: In jedem Schritt i injiziere genau r^i zusätzlichen Fluß in das Netzwerk. *Zeige:* $\forall i \in \mathbb{N}_0 : r^{i+1} = r^{i-1} - r^i$]

Aufgabe 2

Wir nennen einen Fluß f *gerade*, falls $f(a)$ für alle $a \in A$ gerade ist. Analog heißt ein Fluß f *ungerade*, falls $f(a)$ für alle $a \in A$ ungerade ist.
Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Sind alle Kapazitäten $c(a)$ gerade, dann gibt es einen maximalen Fluß, der gerade ist.
b) Sind alle Kapazitäten $c(a)$ ungerade, dann gibt es einen maximalen Fluß, der ungerade ist.

Aufgabe 3

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $l, u : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zwei Funktionen mit $0 \leq l(a) \leq u(a)$ für alle $a \in A$. Eine *Zirkulation* ist eine Abbildung $z : A \to \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{w \in \Gamma^+(v)} z(v, w) - \sum_{w \in \Gamma^-(v)} z(w, v) = 0 \qquad \text{für alle } v \in V$$

und

$$l(a) \leq z(a) \leq u(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine (zulässige) Zirkulation, wenn es in dem Netzwerk $\tilde{N} = (\tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{c}; s, t)$ einen s-t Fluß mit Wert $val(f) = \sum_{a \in A} l(a)$ gibt. Hierbei sei

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &:= V \cup \{s, t\}, \\
\tilde{A} &:= A \cup \{(s, v), (v, t) \mid v \in V\}, \\
\tilde{c}(v, w) &:= \begin{cases} \sum_{x \in \Gamma^-(w)} l(x, w) & \text{falls v=s,} \\ \sum_{x \in \Gamma^+(v)} l(v, x) & \text{falls w=t,} \\ u(v, w) - l(v, w) & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben ein Netzwerk (V, A, c, s, t), zusätzlich $0 \leq b \leq c$. Überlegen Sie sich einen möglichst effizienten Algorithmus, der einen Fluß g mit *minimalem* $val(g)$ bestimmt, der zusätzlich zur Flußerhaltung die Bedingung

$$b(a) \leq g(a) \leq c(a) \qquad \text{für alle } a \in A$$

erfüllt.
[Tip: Führen Sie das Problem auf „normale“ Flußprobleme zurück. Verwende u.a. die letzte Aufgabe.]