Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 11
9. Juli 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

a) Sei A eine ganzzahlige, nicht-singuläre $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: $A^{-1}b$ ist für alle $b \in \mathbb{Z}^n$ ganzzahlig genau dann wenn $\det(A) \in \{1, -1\}$.

[Tip: Verwenden Sie die Cramer'sche Regel.]

b) Eine Matrix heißt *total unimodular*, wenn alle ihre quadratischen Untermatrizen Determinante 0, 1 oder -1 besitzen. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Wenn A total unimodular ist, so besitzt der Polyeder $\{x \mid Ax \leq b\}$ nur ganzzahlige Ecken für beliebiges $b \in \mathbb{Z}^n$.

Ist auch $\{x \mid a \leq Ax \leq b, c \leq x \leq d\}$ ganzzahlig für beliebige Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^n$?

c) Zeigen Sie: Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, so folgt, daß die $m \times n$-Matrix A total unimodular ist:

(i) $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$,

(ii) jede Spalte enthält höchstens einen Eintrag 1 und höchstens einen Eintrag -1.

Aufgabe 2

Das MaximumFlow-Problem kann man folgendermaßen als lineares Programm formulieren:

$$(LP) \qquad \max x_{ts}$$

$$\begin{array}{rl} \sum_{k \in \Gamma^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in \Gamma^-(i)} x_{ki} = 0 & \text{für } i \in V \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} & \text{für } (i,j) \in A \end{array}$$

Hierbei führen zusätzlich zu den Variablen x_{ij} für $(i, j) \in A$ die Variable x_{ts} ein. Diese kann man als Fluß auf einer künstlichen Rückwärtskante von t nach s interpretieren.

a) Geben Sie das duale Programm (DP) zu (LP) an.

b) Zeigen Sie, daß (DP) eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt.

c) Zeigen Sie, daß (DP) eine optimale 0-1-Lösung besitzt.

d) Schließen Sie hieraus auf das MaxFlow-MinCut-Theorem.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt *Vertex Cover*, wenn jede Kante zu mindestens einem Knoten aus C inzident ist. Das gewichtete MinVertexCover-Problem kann man folgendermaßen als (ganzzahliges) lineares Programm schreiben:

$$\begin{array}{rll} & \min \sum_{i \in V} c_i x_i & \\ & x_i + x_j \geq 1 & \text{für alle } (i,j) \in E \\ (*) & x_i \in \{0,1\} & \text{für alle } i \in V. \end{array}$$

Leiten Sie aus der Lösung des entsprechenden linearen Programms mit $0 \leq x_i \leq 1$ statt der Ganzzahligkeitsbedingungen $(*)$ eine Lösung von MinVertexCover, die das Optimum bis auf einen Faktor zwei approximiert.

Hinweis: Wenn Sie einen Schein zur Vorlesung erwerben wollen, dann melden Sie sich bitte für die Abschlußprüfung durch eine E-Mail an `schickin@in.tum.de` an. Voraussichtlich werden wir mündliche Prüfungen am 16.7.02 durchführen, außer wenn die Anzahl der Interessenten so groß ist, daß eine schriftliche Prüfung erforderlich wird.