Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 2
23. April 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß die Laufzeit der Push/Relabel–Methode mit *Highest–Label*–Strategie durch $\mathcal{O}(n^3)$ abgeschätzt werden kann.

Aufgabe 2

In einem Graph $D = (V, A)$ mit einer Kapazitätsfunktion $c : A \to \mathbb{R}_0^+$ und einem Zufluß $b : V \to \mathbb{R}$ heißt ein Fluß $f : A \to \mathbb{R}$ zulässig, wenn gilt

$$\begin{array}{ll} \sum_{u\in\Gamma^+(v)} f(v,u) - \sum_{u\in\Gamma^-(v)} f(u,v) = b(v) & \text{für alle } v \in V, \\ 0 \le f(a) \le c(a) & \text{für alle } a \in A. \end{array}$$

Ferner fordern wir $\sum_{v\in V} b(v) = 0$ (Warum?). Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der entscheidet, ob ein zulässiger Fluß existiert und ggfs. einen solchen Fluß berechnet.

Aufgabe 3

Ein *Zirkulationsproblem* ist wie folgt definiert.
Gegeben: Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, zwei Funktionen $l, u : A \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $0 \le l(a) \le u(a)$ für alle $a \in A$ und eine Kostenfunktion $\gamma : A \to \mathbb{R}$.
Gesucht: Eine (zulässige, vgl. Def. in Aufgabe 3) Zirkulation z für die

$$cost(z) = \sum_{a\in A} \gamma(a) \cdot z(a)$$

minimal ist.

a) Zeigen Sie: Eine Zirkulation z ist genau dann (kosten-) minimal, falls ein geeignet definierter (Wie?) gewichteter Digraph $D_z = (V, A_z, \ell_z)$ keinen gerichteten Kreis K negativer Länge enthält.

b) Überlegen Sie sich einen (möglichst effizienten!) Algorithmus, der eine minimale Zirkulation bestimmt, falls eine solche existiert (vgl. Aufgabe 3).

Aufgabe 4

Gegeben sei der Plan eines Bergbaugebietes in Form eines gerichteten (azyklischen) Graphen $D = (V, A)$. Die Knoten entsprechen möglichen Abbaustellen und eine Kante (v, u) steht für die Tatsache, daß v erst dann abgebaut werden kann, wenn u bereits abgebaut wurde. Ferner wird jeder Stelle v ein erwarteter Profit $b(v)$ zugeordnet. $b(v)$ kann auch negativ sein, wenn beim Abbau von v vermutlich mehr Kosten anfallen als das geförderte Material an Erlös bringt. Gesucht ist ein optimaler Abbauplan, also eine Menge von Knoten $R \subseteq V$, die unter diesen Bedingungen abgebaut werden kann, so daß $\sum_{v\in R} b(v)$ maximal ist. Wie kann dieses Problem effizient gelöst werden?