Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 3
30. April 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

Caterer–Problem:

Ein Gastwirt benötigt an N aufeinander folgenden Tagen $(r_1, r_2, \cdots, r_N)$ Servietten. Er hat drei Optionen:

- Kaufe Servietten zum Stückpreis p.
- Reinige Servietten in der Schnellreinigung. Dauer: m Tage. Stückpreis: f.
- Reinige Servietten in der normalen Reinigung. Dauer n Tage. Stückpreis: s.

Dabei ist $n > m$ und $s < f$.
Jeden Morgen muß er entscheiden, wieviele Servietten er abends in die Schnellreinigung gibt, wieviele in die normale Reinigung und wieviele er behält.
Jeden Morgen bekommt er die frisch gewaschenen Servietten von der Reinigung und kauft gegebenenfalls neue.

a) Formuliere das Problem als ein Zirkulationsproblem. Erkläre die Bedeutung der Knoten und Kanten. Zeige insbesondere, daß es immer eine zulässige Zirkulation gibt.

b) Löse das Problem mit $N = 3$, $r = (3, 2, 4)$, $m = 1$ (i.e. Servietten vom Vorabend sind bis zum nächsten Morgen gereinigt), $n = 2$, $p = 10$, $f = 6$ und $s = 3$. Begründe, warum die Lösung optimal ist.

Aufgabe 2

Vor dem Hintergrund der Algorithmen, die wir in Aufgabe 4 von Blatt 1 und Aufgabe 3 von Blatt 2 kennengelernt haben, erscheint es nicht überraschend, daß sich das folgende "Minimaler-Fluß"-Problem effizient lösen läßt (Wie?):

$$\text{Minimiere } \sum_{e \in E} w(e) \cdot f(e)$$

$$\begin{array}{rl} \sum_{u \in \Gamma^+(v)} f(v,u) - \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u,v) = b(v) & \text{für alle } v \in V \\ 0 \leq f(e) \leq c(e) & \text{für alle } e \in E \end{array} \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, daß sich das Kürzeste-Pfade-Problem mit einem Algorithmus für (*) lösen läßt.

b) Zeigen Sie, daß sich die folgende (sehr allgemeine) Variante eines Flußproblems ebenfalls auf (*) reduzieren läßt:

$$\text{Minimiere } \sum_{e \in E} w(e) \cdot f(e)$$

$$\begin{array}{rl} a(v) \leq \sum_{u \in \Gamma^+(v)} f(v,u) - \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u,v) \leq b(v) & \text{für alle } v \in V \\ l(a) \leq f(a) \leq u(a) & \text{für alle } a \in A \end{array}$$

Hier bei sind die Fälle $l(a) = -\infty$ und $u(a) = \infty$ explizit zugelassen.

[TIP: Gehen Sie schrittweise vor. Kümmern Sie sich nacheinander um beide Gruppen von Bedingungen. Bei der zweiten Bedingung betrachten Sie zuerst die Fälle $l(a) = -\infty$ und $u(a) = \infty$.]

c) Lösen Sie mit Hilfe von (*) das folgende Scheduling-Problem: Gegeben seien q identische Maschinen und p Jobs mit identischer Ausführungszeit. Die Jobs unterscheiden sich jedoch hinsichtlich der Kosten $c_j(\tau)$, die anfallen, wenn Job j zur Zeit τ ausgeführt wird. Die Funktion $c_j(\tau)$ sei monoton steigend in τ. Gesucht ist ein optimaler Schedule (als eine Zuordnung der Jobs zu Ausführungszeitpunkten und Maschinen mit minimalen Gesamtkosten).

Aufgabe 3

Modifizieren Sie den Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen Schnittes aus der Vorlesung so, daß er nicht nur den *Wert* eines minimalen Schnittes ausgibt, sondern auch die Knotenmenge eines minimalen Schnittes.