Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 4
7. Mai 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

Das MinCut-Problem läßt sich (wie wir das bei s-t-Cuts schon getan haben) auch gewichtet betrachten. Dazu erhält jede Kante e ein Gewicht $c(e)$. Gesucht ist nun ein Cut $(W, \bar{W})$ mit minimalem Gewicht $c(W, \bar{W}) := \sum_{e=\{u,v\}, u \in W, v \notin W} c(e)$. Übertragen Sie die Idee das Algorithmus von Stoer/Wagner auf diesen Fall. Welche Datenstrukturen werden benötigt und welche Laufzeit ergibt sich?

Aufgabe 2

Gegeben sei (wie in der vorigen Aufgabe) ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c(e)$. Für das Gewicht eines Cuts $(A, \bar{A})$ schreiben wir kurz $c(A) := c(A, \bar{A})$. Für zwei $u, v \in V$ bezeichne $f(u, v)$ das Gewicht eines minimalen u-v-Cuts in G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für beliebige Knoten $u, v, w_1, \ldots, w_r \in V$ gilt

$$f(u, v) \geq \min\{f(u, w_1), f(w_1, w_2), \ldots, f(w_r, v)\}.$$

(Tip: Induktion!)

b) Ein gewichteter Baum $T = (V, F)$ heißt *flußäquivalent* zu $G = (V, E)$, wenn für alle Knotenpaare $u, v \in V$ der Wert eines minimalen u-v-Cuts in G und T gleich ist.

Sei $K = (V, \binom{V}{2})$ ein gewichteter Graph, wobei die Kante $\{u, v\}$ das Gewicht $f(u, v)$ erhält. Zeigen Sie, daß ein Spannbaum von K mit maximalem Gewicht flußäquivalent zu G ist.

c) Es gilt

$$c(A) + c(B) \geq c(A \cup B) + c(A \cap B)$$

für beliebige Mengen $A, B \subseteq V$.

d) Sei $(S, \bar{S})$ ein minimaler s-t-Cut mit $v, w \in S$. Dann existiert ein minimaler v-w-Schnitt $(T, \bar{T})$ mit $T \subset S$.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Betrachten Sie folgenden Algorithmus zur Berechnung eines minimalen Cuts (wir beschränken uns hierbei der Einfachheit halber auf ungewichtete Cuts):

- Trivialer Terminierungsfall: G besteht nur aus zwei Knoten u, v.

- Für $n > 2$: Wähle zufällig (und gleichwahrscheinlich) eine Kante $\{u, v\}$ und kontrahiere diese zu G_{uv} (wie im Algorithmus von Stoer/Wagner). Wende dann den Algorithmus rekursiv auf G_{uv} an.

Zeigen Sie:

a) Der Wert eines minimalen Cuts ist höchstens $2m/n$.

b) Sei $(S, \bar{S})$ ein minimaler Cut. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, daß keine Kante des gegebenen Cuts während eines Durchlaufs des Algorithmus kontrahiert wird, ist mindestens $\frac{2}{n(n-1)}$. Wie kann dieses randomisierte Verfahren zur Bestimmung eines minimalen Cuts verwendet werden?