Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Angelika Steger

Sommersemester 2002
Übungsblatt 6
28. Mai 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $T = (V, E)$ ein Baum auf $n \geq k + 1$ Knoten. Zeigen Sie, daß es einen Knoten $v_0 \in V$ gibt, so daß $T - v_0$ einen Wald F enthält mit $k \leq |V(F)| < 2k$.

Aufgabe 2

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(n)$ in 2-fach zusammenhängenden outerplanaren Graphen mit $|V| \equiv 0 \bmod 2$ einen $(2, \frac{1}{2})$-Separator bestimmt.

Aufgabe 3

Im folgenden betrachten wir Algorithmen zur Lösung von MaxIndependentSet in planaren Graphen.

a) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für MaxIndependentSet auf outerplanaren Graphen an. Schaffen Sie's in $\mathcal{O}(n)$?.

   Tip: Eine Möglichkeit besteht darin, den dualen Graphen geeignet zu durchlaufen und Dynamische Programmierung zu verwenden!

b) Verwenden Sie den Algorithmus aus der vorangehenden Teilaufgabe, um MaxIndependentSet in planaren Graphen bis auf einen Faktor 2 genau zu approximieren, d.h. Ihr Algorithmus soll eine Lösung berechnen, die mindestens halb so viele Knoten wie eine optimale Lösung enthält.

   Tip: Zerlegen Sie den Graphen geeignet.

c) Man kann aufbauend auf dem Ergebnis aus a) zeigen, daß es einen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(8^k n)$ gibt, der MaxIndependentSet in k-outerplanaren Graphen löst. Intuitiv entspricht ein k-outerplanarer Graph im Wesentlichen k ineinander geschachtelten Kreisen mit zusätzlichen Sehnen. Formal gesehen definieren wir zu einer planaren Einbettung von $G = (V, E)$ Knotenlevels $l : V \to \mathbb{N}$ wie folgt. Alle Knoten auf dem äußeren Gebiet liegen auf Level 1. Nach Entfernen aller Knoten auf Level $1, \ldots, i - 1$ besitzen die Knoten, die nun auf dem äußeren Gebiet liegen, Levelnummer i. Ein Graph ist k-outerplanar, wenn es eine Einbettung gibt, so daß alle Knotenlevels gleicher gleich k sind. Ein 1-outerplanarer Graph ist also einfach outerplanar.

   Geben Sie unter Verwendung dieses Algorithmus ein Verfahren zur (möglichst genauen!) Approximation von MaxIndependentSet an, dessen Laufzeit polynomiell in n ist.