Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2002
Übungsblatt 8
11. Juni 2002

Einführung in die Informatik IV

Abgabetermin: Dienstag, 18. Juni 2002, bis 11:00Uhr im Briefkasten bei S0314

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Sprache L über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{a\}$ — solche Sprachen heißen Tally-Sprachen. Im Folgenden soll Schritt für Schritt gezeigt werden, dass jede kontextfreie Tally-Sprache regulär ist, wir setzen also L als kontextfrei voraus.
Zum Beweis der Regularität definieren wir die Hilfssprachen $L_{(k,q)} := \{a^k a^{iq} \mid i \geq 0\}$ für $k, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $L_{(k,q)}$ ist regulär für alle k, q.

(b) Ist $q \geq 1$ und gilt $k \equiv k' \mod q$, (d.h., $k - k'$ ist durch q teilbar), so gilt

$$L_{(k,q)} \cup L_{(k',q)} = L_{(\min\{k,k'\},q)}.$$

(c) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und endlich viele Indizes $k_{ij}, q_j \geq 1$, $(1 \leq i \leq m_j,\ 1 \leq j \leq p)$ mit

$$L = \{z \in L \mid |z| < n\} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bigcup_{i=1}^{m_j} L_{(k_{ij},q_j)}.$$

(*Hinweis:* Versuchen Sie es mit dem $n \in \mathbb{N}$ aus dem Pumping-Lemma.)

(d) L ist regulär.

Aufgabe 2

Sei Σ ein endliches Alphabet und $L = \Sigma^* - \{ww | w \in \Sigma^*\}$ das Komplement der (nicht kontextfreien) Sprache $\{ww | w \in \Sigma^*\}$. Zeigen Sie:

(a) Für ein Wort $x \in \Sigma^*$ der Länge $2n$ gilt: $x \in L \iff \exists i : 1 \leq i \leq n \wedge x_i \neq x_{i+n}$ (x_i bezeichnet das $i-$te Zeichen in x).

(b) Die Sprache L ist kontextfrei. Hinweis: Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen Kellerautomaten, der die Aussage von (a) implementiert.

Aufgabe 3

Sei L eine reguläre Sprache über dem endlichen Alphabet Σ. Konstruieren Sie einen LBA, der die Sprache $\{ww | w \in L\}$ erkennt.

Aufgabe 4

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $b(n) \in L(0 + 1\{0,1\}^*)$ bzw. $u(n) \in a^*$ die binäre bzw. die unäre Darstellung. Konstruieren Sie eine Ein-Band-Turing-Maschine, die die Eingabe $b(n)$ in $u(n)$ umwandelt.