Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2002/03
Übungsblatt 11
10. Januar 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Letzter Abgabetermin: Montag, 20. Januar 2003 (vor der Übung)

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph und $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion auf den Kanten. Ferner definiere $C = (V_1, V_2)$ einen Schnitt und $E_C = E \cap (V_1 \times V_2)$ die Menge der Kanten des Schnitts.

a) Zeigen Sie den zweiten Fall der so genannten *blauen* Regel:

> *Hat die Kante $e \in E_C$ minimales Gewicht über alle Kanten in E_c (d.h. $w(e) = \min\{w(e_i) \mid w_i \in E_C\}$), dann gibt es einen minimalen Spannbaum von (G, w), der e enthält.*

b) Zeigen Sie den zweiten Fall der so genannten *roten* Regel:

> *Sei $c = e_1, e_2, \ldots, e_k$ ein Kreis in G und e_i eine Kante mit maximalem Gewicht in c (d.h. $w(e_i) = \max\{w(e_j) \mid 1 \leq j \leq k\}$), dann gibt es einen minimalen Spannbaum von (G, w), der e_i nicht enthält.*

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe soll die Korrektheit von Kruskals Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen Spannbaums gezeigt werden.

a) Sei $G = (V, E' \uplus E)$ ein Graph mit einer Gewichtsfunktion $w : E' \uplus E \to \mathbb{R}$ und gelte für alle $e' \in E'$ und $e \in E$, dass $w(e') \leq w(e)$.
Sei F ein minimaler Spannwald des Graphen $G' = (V, E')$ und seien $C_1, C_2, \ldots, C_l$ die Zusammenhangskomponenten von G'. Für eine beliebige Kante $\tilde{e} = (v, w) \in E$ sollen die beiden folgenden Aussagen gezeigt werden (mit Hilfe der roten und blauen Regel).

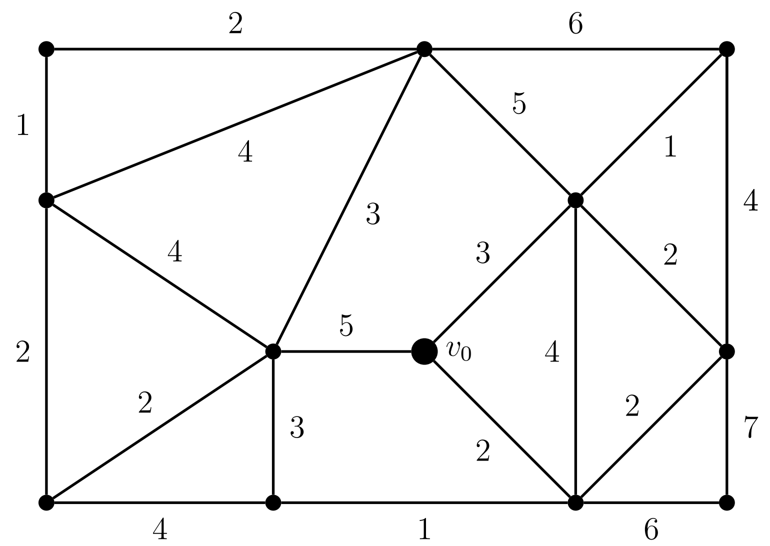
   (a) Befinden sich v und w in der selben Zusammenhangskomponente C_i, dann ist F auch ein minimaler Spannwald des Graphen $G_1 = (V, E' \cup \{\tilde{e}\})$.

   (b) Befinden sich v und w in zwei unterschiedlichen Zusammenhangskomponente C_i und C_j, dann ist $F \cup \{\tilde{e}\}$ ein minimaler Spannwald des Graphen $G_1 = (V, E' \cup \{\tilde{e}\})$.

b) Zeigen Sie mit den Aussagen aus a) die Korrektheit von Kruskals Algorithmus.

Aufgabe 3

Führen Sie auf nachfolgendem Graphen Prims Algorithmus (erste Variante) durch. Starten Sie dabei im Knoten v_0 und stellen Sie, analog zur Vorlesung, nach jedem Schritt den Graphen dar, wobei an jeder Kante das Gewicht und an jedem Knoten der ihm zugeordnete Schlüssel aus der Priority-Queue (soweit der Knoten dort gespeichert ist) anzugeben ist. Zeichnen Sie auch jeweils den bisher aufgebauten Baum ein.



Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass in einem gewichteten zusammenhängenden Graphen der minimale Spannbaum eindeutig ist, wenn es keine zwei Kanten mit gleichem Gewicht gibt.

Hinweis: Sie können in Ihrer Lösung verwenden, dass jeder minimale Spannbaum eines Graphen mittels des Algorithmus von Kruskal erzeugt werden kann.