Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2002/03
Übungsblatt 12
17. Januar 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Letzter Abgabetermin: Montag, 27. Januar 2003 (vor der Übung)

Aufgabe 1

Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Ein *d-Heap* ist definiert als ein vollständiger d-ärer Baum, der die Heapbedingung erfüllt. Beschreiben Sie eine Implementierung von d-Heaps, die die INSERT-Operation in Zeit $O(\log_d n)$, die FIND_MIN-Operation in konstanter und die DELETE-Operation in Zeit $O(d \cdot \log_d n)$ ermöglicht.

Hinweis: In einem vollständigem d-ären Baum hat jeder Knoten (mit höchstens einer Ausnahme) genau d Kinder, wobei die Knoten Ebene für Ebene von links nach rechts eingefügt werden. D.h. nur der innere Knoten, an dem zuletzt Kinder angefügt werden, darf weniger als d Kinder besitzen.

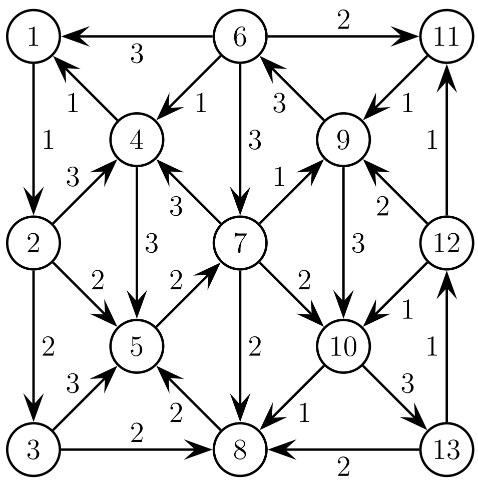
Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass eine Implementierung von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung von d-Heaps (vgl. Aufgabe 1) Laufzeit $O(m \log_{2+\frac{m}{n}} n)$ hat.

Hinweis: Sie können voraussetzen, dass ein n-elementiger d-Heap in Zeit $\mathcal{O}(n)$ aufgebaut werden kann.

Aufgabe 3

Geben Sie für das folgende Netzwerk die resultierende Entfernungsmatrix an, wenn darauf der All-pairs-shortest-path-Algorithmus von Floyd angewendet wird. Geben Sie auch die Matrix an, die im Laufe des Algorithmus entsteht, wenn als Zwischenknoten die Knoten mit den Nummmer kleiner gleich 6 zugelassen sind.



Aufgabe 4

In dieser Aufgabe soll der Algorithmus von Bellman-Ford analysiert werden. Sei $B_k[i]$ die im Algorithmus auftretende Länge eines kürzesten Pfades mit höchstens k Kanten vom Startknoten s zum Knoten i. Zeigen Sie folgende Aussage:

> *Existiert in G ein Kreis mit negativer Länge (d.h. die Summe über die Gewichte in diesem Kreis ist negativ), so gibt es einen Knoten i mit $B_n[i] < B_{n-1}[i]$.*