Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

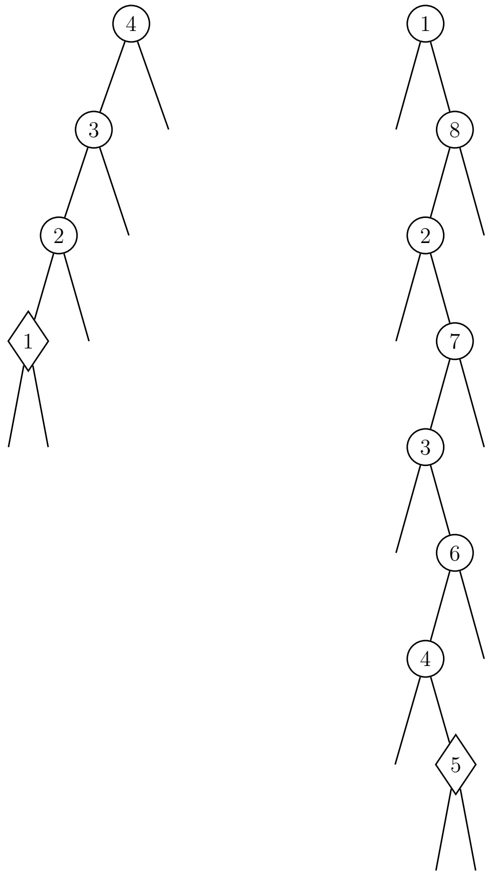
WS 2002/03
Übungsblatt 4
8. November 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Letzter Abgabetermin: 18. November 2002 (vor der Übung)

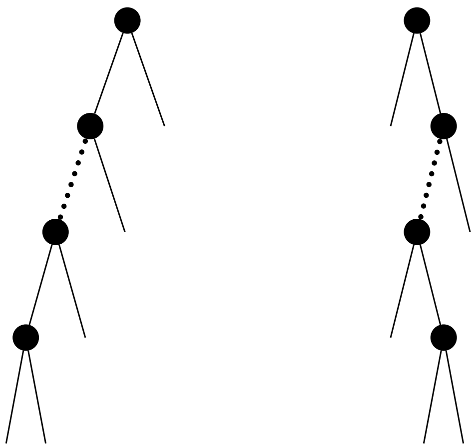
Aufgabe 1

Gegeben seien die beiden folgenden Splay-Trees, hierbei sind nur die inneren Knoten angegeben, d.h. bei den fehlenden Unterbäumen handelt es sich um leere Bäume.



a) Führen Sie in beiden Bäumen eine Splay-Operation auf die durch eine Raute dargestellten Knoten durch. Geben Sie hierbei alle Zwischenschritte an.

b) Die beiden Bäume können jeweils durch eine Folge von Insert und Select Operationen erzeugt werden, die einem gewissen Schema unterliegen. Hierdurch kann man beliebig große Bäume folgender Form generieren.



Geben Sie jeweils das zugrundeliegende Schema an und begründen Sie formal die Korrektheit Ihrer Lösung.

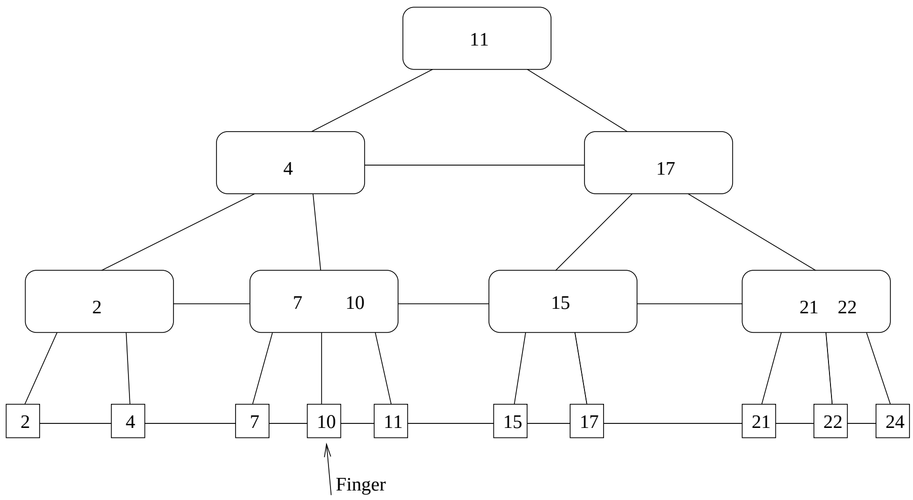
Aufgabe 2

Beschreiben Sie die Delete-Operation in Rot-Schwarz-Bäumen. Achten Sie hierbei darauf, dass der Baum auch nach der Operation ein Binärbaum sein muss.

Hinweis: Durch geeignete Fallunterscheidungen kann der Baum so traversiert und modifiziert werden (vom zu entfernenden Blatt bis maximal zur Wurzel und wieder zurück), dass das Blatt mittels eines elementaren Schrittes entfernt werden kann .

Aufgabe 3

Die Datenstruktur der (a, b)-Bäume kann zu *level-linked* (a, b)-Bäumen erweitert werden. Hierzu werden alle Kanten als bidirektional betrachtet, d.h. sie können in beiden Richtungen durchlaufen werden. Ferner verlaufen auf allen Ebenen zusätzliche Kanten zwischen benachbarten Knoten (siehe Abbildung).



Ein *Finger* ist als eine Referenz auf ein Blatt definiert (siehe Abbildung für ein Beispiel). Zeigen Sie folgende Aussage:

Sei p ein Finger in einem level-linked (a, b)-Baum. Die Suche nach einem Schlüssel, der d Schlüssel von p entfernt liegt, benötigt Zeit $\Theta(1 + \log d)$.

Aufgabe 4

In Splay-Trees sei für alle Knoten v das Gewicht $w(v)$ definiert. Ferner wird mit W die Summe der Gewichte aller Knoten bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit für die $\textsc{Delete}(i, T)$ Operation mit

$$3 \log \left(\frac{W}{w(i)} \right) + 3 \log \left(\frac{W - w(i)}{w(i^-)} \right) + \mathcal{O}(1) \qquad (1)$$

angegeben werden kann. Dabei bezeichnet i^- den Vorgänger von i in der durch T gegebenen Ordnung. Es kann angenommen werden, dass i nicht das minimale Element in der Ordnung ist.

b) Zeigen sie, wie mit Aussage (1) die in der Vorlesung angegebene Laufzeit $\mathcal{O}(\log n)$ gefolgert werden kann.