Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

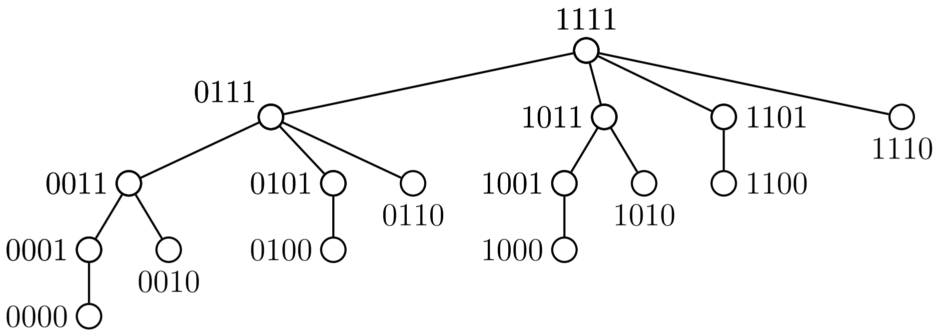
WS 2002/03
Übungsblatt 6
22. November 2002

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

Letzter Abgabetermin: Montag, 2. Dezember 2002 (vor der Übung)

Aufgabe 1

In einem Binomialbaum B_k ($k > 0$) seien die Knoten in der Reihenfolge einer post-order Traversierung, beginnend mit 0, durchnummeriert. Für jeden Knoten v sei $\mathrm{num}(v) \in \{0,1\}^k$ die Binärdarstellung der Nummer dieses Knotens. Die Kinder jedes Knotens seien dabei in absteigender Reihenfolge ihrer Grade geordnet. Beispiel:



Zeigen Sie:

a. Liegt v in Tiefe d_v im Baum B_k, so entält der Binärstring $\mathrm{num}(v)$ genau $(k - d_v)$ Vorkommen des Zeichens **1**.

b. Die Anzahl der Kinder jedes Knotens v ist gleich der Anzahl der **1**'en rechts vom äußersten rechten Vorkommen einer **0** im Binärstring $\mathrm{num}(v)$.

Aufgabe 2

Eine Binomial Queue werde, beginnend mit der leeren Queue, durch sukzessive Vereinigung (MERGE-Operation) mit trivialen, einelementigen Queues, schrittweise aufgebaut. Welche Gesamtkosten verursacht der Aufbau einer n-elementigen Queue bei diesem Verfahren? Geben Sie für die Anzahl der ausgeführten link-Operationen auch den konstanten Faktor im führenden Term an.

Aufgabe 3

Beschreiben Sie eine alternative Implementierung der DELETE-Operation für Binomial Heaps, die sich nicht auf die Operationen DECREASE-KEY und DELETE-MIN abstützt. Es soll stattdessen folgende, auch in der Vorlesung skizzierte Idee verwendet werden: Beim Löschen des Knotens x aus dem Binomialbaum B_k wird eine geeignete Zerlegung von B_k in kleinere Binomialbäume betrachtet, die Teilbäume von B_k darstellen. Die von der Löschung nicht betroffenen Binomialbäume werden aus B_k entfernt und in die Wurzelliste eingefügt. Hierbei werden Verschmelzungsoperationen ausgeführt, so daß schließlich alle Binomialbäume von paarweise unterschiedlichem Wurzelgrad sind. Wieviele Teilbäume welcher Größe werden so in die Wurzelliste verschoben? Geben Sie die gesamten Kosten Ihrer Lösung an.

Aufgabe 4

Bei der Operation DELETE-MIN für Fibonacci-Heaps wird ein Element x mit minimalem Schlüssel (welches auf Grund der Heap-Bedingung Wurzel eines Baums sein muß) gelöscht, und die Unterbäume an den Kindern von x werden in die Wurzelliste eingefügt. Dann folgt eine Restrukturierungsoperation, die sukzessive Bäume mit gleichem Wurzelrang verbindet, bis alle Wurzelränge paarweise verschieden sind. Beschreiben Sie eine effiziente Implementierung dieser Operation, deren Gesamtkosten durch $O(r + w)$ gegeben sind, wobei r der maximale Wurzelrang und w die Anzahl der Bäume in der Wurzelliste sei.