Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 01

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 28.10.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Monte Carlo vs. Las Vegas (6 Punkte)

Angenommen wir haben einen Monte Carlo Algorithmus A für ein Problem P, der auf jeder Instanz der Größe n erwartete Laufzeit höchstens $T(n)$ hat und mit Wahrscheinlichkeit $p(n)$ eine korrekte Antwort bestimmt. Nehmen wir weiter an, daß die Korrektheit einer Lösung für P mit einem Algorithmus B in höchstens $t(n)$ Schritten überprüft werden kann. Wie kann man mit Hilfe von A und B einen Las Vegas Algorithmus konstruieren, der für P immer korrekte Antworten gibt und erwartete Laufzeit höchstens $\frac{T(n)+t(n)}{p(n)}$ hat?
Hinweis. Erinnern Sie sich an die geometrische Verteilung.

Aufgabe 2 Vereinsamung (6 Punkte)

Angenommen wir setzen k Personen unabhängig voneinander an einen runden Tisch an dem $n \geq k$ Stühle stehen. Was ist der Erwartungswert für die Anzahl der Personen, die keinen direkten Tischnachbarn haben ?
Hinweis. Benutzen Sie eine Indikatorvariable und die Linearität des Erwartungswertes.

Aufgabe 3 Volltrunkene Matrosen (6 Punkte)

Ein Schiff geht an einem Hafen vor Anker und 40 Seeleute gehen an Land um sich etwas zu amüsieren. Mitten in der Nacht kommen sie volltrunken zurück und deswegen wählt jeder von ihren die Kabine in der er schläft zufällig. Was ist die erwartete Anzahl Matrosen, die in ihrer eigenen Kabine ihren Rausch ausschlafen?

Aufgabe 4 Quickselect (22 Punkte)

Betrachten wir folgendes *Selektionsproblem*: gegeben ist eine n-elementige Zahlenmenge von der das k-kleinste Element bestimmt werden soll.
Es ist klar, daß dieses Problem höchstens so schwer wie sortieren ist, denn wenn man die Menge aufsteigend sortiert und dann das k-te Element bestimmt, so ist das natürlich das k-kleinste.
Sind für dieses Problem nur Algorithmen interessant, die Laufzeit $O(n \log n)$ haben? Betrachten wir den Algorithmus *Quickselect*, der seinen Namen aufgrund der Ähnlichkeit mit Quicksort hat.

Algorithmus 1 Quickselect

Eingabe. n-elementige Zahlenmenge S, ganze Zahl k $(1 \leq k \leq n)$.
Ausgabe. Das k-kleinste Element von S.

Schritt 1. Wähle ein Pivotelement $p \in S$ zufällig.

Schritt 2. Partitioniere $S \backslash \{p\}$ in die Mengen S_l und S_r wie folgt: S_l enthält die Elemente aus $S \backslash \{p\}$ die höchstens so groß wie p und S_r enthält die Elemente aus $S \backslash \{p\}$ die größer als p sind.

Schritt 3. Falls $|S_l| = k - 1$ ist, dann gib p aus. Sonst unterscheide folgende Fälle:

Fall 1. Wenn $|S_l| \geq k$, dann bestimme das k-kleinste Element rekursiv in S_l.

Fall 2. Sonst bestimme rekursiv das $k - |S_l| - 1$-kleinste Element in S_r.

Die Laufzeit von Quickselect messen wir in der Anzahl benötigter Vergleiche.

1. Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus.
2. Zeigen Sie, daß Quickselect worst-case Laufzeit $\Theta(n^2)$ hat.
3. Unter dem *Median* versteht man das $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-kleinste Element einer n-elementigen Zahlenmenge. Zeigen Sie, daß Quickselect zur *Medianbestimmung* erwartete Laufzeit $O(n)$ hat. Dabei können Sie analog zur Abschätzung der erwarteten Laufzeit von Quicksort in der Vorlesung vorgehen.
   (a) Verwenden Sie eine Indikatorvariable X_{ij} die 1 ist, falls die Elemente i und j im Lauf des Algorithmus verglichen werden und 0 sonst. Berechnen Sie für jedes X_{ij} die Wahrscheinlichkeit daß die Variable den Wert 1 annimmt.
   Hinweis. Unterscheiden Sie dabei 3 Fälle.
   (b) Stellen Sie mit diesen Wahrscheinlichkeiten den Erwartungswert der Laufzeit auf und schätzen Sie diesen geeignet ab, wobei Ihnen folgendes helfen kann:
   $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \Theta(\log k) \qquad \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \qquad \log a + \log b = \log ab \qquad \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq 2^n$$
4. Gilt diese erwartete Laufzeit auch noch für jedes k?

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de