Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 02

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 4.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Min-Cut (10 Punkte)

Gegeben sei ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$. Angenommen wir suchen einen s-t-Min-Cut, d.h. eine Knotenteilmenge $C \subset V$, mit möglichst kleinem Cut, die den Knoten s, aber nicht den Knoten t enthält.
Damit der Algorithmus für Min-Cut aus der Vorlesung einen solchen Cut finden kann, werden nur Kanten kontrahiert, die s und t *nicht* verbinden.

1. Finden Sie ein Beispiel, bei dem der Algorithmus nur mit exponentiell kleiner Wahrscheinlichkeit einen s-t-Min-Cut findet.

2. Was bedeutet das für die Laufzeit, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{2}$ einen s-t-Min-Cut finden will?

Aufgabe 2 Dreiecke in Zufallsgraphen (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Graphen $G = (V, E)$ der n Knoten enthält. Für jede der $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten wird ausgewürfelt, ob sie im Graphen existiert oder nicht. Die Wahrscheinlichkeit p für die Existenz einer Kante beträgt dabei immer $n^{-\alpha}$. Ein *Dreieck* ist ein Teilgraph von G mit 3 Knoten und 3 Kanten, d.h. ein K_3. Zeigen Sie:

1. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Graph mindestens ein Dreieck enthält geht für $\alpha > 1$ gegen Null (für $n \to \infty$).

   Hinweis. Sei X die Anzahl der Dreiecke im Graphen. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$. Wie viele Dreiecke hat ein Graph höchstens? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß drei Knoten paarweise durch eine Kante verbunden sind?

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Graph *kein* Dreieck enthält geht für $\alpha < 1$ gegen Null.

   Hinweis. Machen Sie sich klar, daß $\mathbb{P}\left[|X - E[X]| \geq E[X]\right]$ eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit ist, daß es in dem Graph kein Dreieck gibt. Benutzen Sie die Ungleichung von Chebyshev um $\mathbb{P}\left[|X - E[X]| \geq E[X]\right]$ abzuschätzen.

Aufgabe 3 Hypergraph Färbung (10 Punkte)

Hypergraphen stellen eine Verallgemeinerung von Graphen dar. Ein *Hypergraph* $H = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge V und *Hyperkantenmenge* E, wobei jede Hyperkante eine beliebige (nicht-leere) Teilmenge von V ist. (Wenn jede Hyperkante die gleiche Anzahl k Knoten umfaßt heißt der Hypergraph k-uniform. Graphen sind also 2-uniforme Hypergraphen.)
Unter einer *zulässigen 2-Färbung* verstehen wir eine Zuweisung die jedem Knoten eine von zwei Farben zuordnet, so daß keine Hyperkante *monochromatisch* ist, d.h. nicht alle Knoten einer Hyperkante gleich gefärbt sind.
Zeigen Sie folgende Aussage: Jeder Hypergraph H mit weniger als 2^{k-1} Hyperkanten, die jeweils mindestens k Knoten umfassen, ist zulässig 2-färbbar.

Aufgabe 4 Erfüllende Belegungen (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß es zu jeder Menge von m Klauseln eine Variablenbelegung gibt, so daß *mindestens* $\frac{m}{2}$ Klauseln erfüllt sind. Geben Sie eine solche Klauselmenge an, bei der jede Variablenbelegung *höchstens* $\frac{m}{2}$ Klauseln erfüllt.

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de