Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 03

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 11.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 John von Neumann's Münz Trick (10 Punkte)

Angenommen, Sie sollen Zufallsbits für einen randomisierten Algorithmus erzeugen, haben aber nur eine verbeulte Münze zur Verfügung, d.h. Sie haben eine 0/1-Zufallsvariable, mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p für eine 1.
Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man mit der verbeulten Münze *ein* Zufallsbit erzeugt, bei dem die Wahrscheinlichkeit für eine 1 gleich $\frac{1}{2}$ ist.
Der Erwartungswert der Anzahl der Würfe mit der verbeulten Münze, die nötig ist, um dieses Zufallsbit zu generieren, soll höchstens $\frac{1}{p(1-p)}$ betragen.
Hinweis. Betrachten Sie Paare von Würfen mit der verbeulten Münze.

Aufgabe 2 Randomisierte Median Bestimmung (20 Punkte)

Erinnern Sie sich an den Algorithmus *Randomized Median* aus der Vorlesung (siehe umseitig).

1. In der Vorlesung wurde $m = n^{3/4}$, $m' = 2n^{3/4}$ und $\xi = \sqrt{n}$ gewählt. Betrachten wir folgende „schlechte" Ereignisse:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: &\quad l \geq \frac{n}{2} \\ \mathcal{B}: &\quad l + t < \frac{n}{2} \\ \mathcal{C}: &\quad l \geq \frac{n}{2} - 2n^{3/4} \\ \mathcal{D}: &\quad l + t > \frac{n}{2} + 2n^{3/4} \end{aligned}$$

   Diese Ereignisse können wir wie folgt interpretieren: tritt $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ ein, enthält das Array B den Median nicht; tritt $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{D}$ ein, enthält B zu viele Elemente (um erwartete Laufzeit $O(n)$ zu bekommen). In der Vorlesung wurde die Wahrscheinlichkeit für $\mathcal{A}$ abgeschätzt: $\mathbb{P}[\mathcal{A}] \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}$. Zeigen Sie diese Schranke auch für die Ereignisse $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

2. Zeigen Sie, daß für die erwartete Anzahl Vergleiche X gilt: $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}n + o(n)$.

Algorithm 3 Randomized Median

Eingabe. n-elementiges Array A.
Ausgabe. Der Median von A.

Schritt 1. Wähle m Elemente aus A zufällig und speichere sie in einem Array B.

Schritt 2. Sortiere dieses Array B mit einem $O(m \log m)$ Algorithmus.

Schritt 3. Wähle zwei Pivotelemente $p_l = B[\max\{\frac{1}{2}m - \xi, 1\}]$ und $p_r = B[\min\{\frac{1}{2}m + \xi, m\}]$. Dann partitioniere A wie folgt:

$l = 0, t = 0$
for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  if $p_l \leq A[j] \leq p_r$ **then**
    $t = t + 1$
    $B[t] = A[j]$
  else if $A[j] < p_l$ **then**
    $l = l + 1$
  end if
end for

Schritt 4. Falls $t > m'$ oder $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oder $l + t < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gehe zu Schritt (1), sonst sortiere B und gib $B[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l]$ aus.

Aufgabe 3 Balls and Bins (10 Punkte)

Angenommen m Bälle werden unabhängig und gleichverteilt in n Urnen geworfen. X bezeichne die Anzahl leerer Urnen.

1. Zeigen Sie, daß für $m = n$ und große n die erwartete Anzahl leerer Urnen $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{e}$ ist.
2. Was ist $\mathbb{E}[X]$ wenn m Bälle in n Urnen geworfen werden?

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de