Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 05

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 25.11.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten (18 Punkte)

Angenommen man bekommt eine Münze, von der man weiß, daß $\mathbb{P}[\text{Kopf}] = p \geq a$ für ein festes a gilt. Wenn wir keine weitere Information über p haben, dann soll ein Wert $\hat{p}$ geschätzt werden, für den gilt:

$$\mathbb{P}[|p - \hat{p}| \geq \epsilon p] \leq \delta,$$

für beliebige aber feste $a > 0$, $\epsilon > 0$, $\delta < 1$.
Sei N die Anzahl Würfe die gemacht werden, um $\hat{p}$ zu erhalten. Wie groß muß N mindestens sein, damit die oben angegebene Abschätzung gilt?

Aufgabe 2 Martingal I (11 Punkte)

Angenommen wir haben eine Kiste, in der sich s_0 schwarze und w_0 weiße Bälle befinden. Wir führen folgendes Spiel aus: Wir ziehen zufällig einen der Bälle und legen ihn zusammen mit c zusätzlichen Bällen seiner eigenen Farbe zurück. Sei $X_i = s_i/(s_i + w_i)$ der Bruchteil der schwarzen Bälle in der Kiste nachdem wir i Bälle gezogen und zurückgelegt haben.
Zeigen Sie, daß die Sequenz $X_0, X_1, \ldots$ ein Martingal ist.

Aufgabe 3 Martingal II (11 Punkte)

Angenommen wir werfen m Bälle in n Kisten. Sei Z die Zufallsvariable, die die Anzahl der Kisten zählt, in der kein Ball liegt, nachdem alle Bälle geworfen wurden.
Wir definieren die Zufallsvariable Z_t als den Erwartungswert von Z *nachdem* $0 \leq t \leq m$ Bälle in die Kisten geworfen wurden. (Es ist klar, daß Z_t von der Anzahl und der Lage der bisher geworfenen Bälle abhängt.)
Zeigen Sie, daß die Sequenz $Z_0, Z_1, \ldots, Z_m$ ein Martingal ist und daß $Z_0 = \mathbb{E}[Z]$ und $Z_m = Z$ gilt.

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de