Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 06

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 2.12.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Münzwürfe (15 Punkte)

Angenommen wir haben drei Münzen; Münze 1 hat für „Kopf“ Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, Münze 2 bevorzugt „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ und Münze 3 bevorzugt „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Für den ersten von n Münzwürfen nehmen wir Münze 1 und für die verbleibenden $n-1$ Würfe verwenden wir folgende Regel: ist der Ausgang des i-ten Wurfs „Kopf“, so nehmen wir für den $i+1$-ten Wurf Münze 2, sonst Münze 3. Sei X die Anzahl Münzwürfe die „Kopf“ zeigen.

1. Zeigen Sie, daß jeder Münzwurf den bedingten Erwartungswert von X nur um eine Konstante ändern kann.

2. Benutzen Sie die Ungleichung von Azuma um eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Abweichens von X vom Erwartungswert zu bekommen.

Theorem 1 (Azuma) *Seien $X_0, X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $|X_k - X_{k-1}| \leq c_k$ für jedes $k = 1, \ldots, n$, wobei c_k von k abhängen kann. Dann gilt für jedes $t \geq 0$ und $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}\left[|X_t - X_0| \geq \lambda\right] \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sum_{k=1}^{t} c_k^2}\right).$$

Aufgabe 2 Markov-Ketten (10 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Wertebereich $\mathbb{N}$ und es bezeichnen die Zufallsvariablen $Y_t = \min\{X_1, \ldots, X_t\}$ bzw. $Z_t = \max\{X_1, \ldots, X_t\}$ das Minimum bzw. Maximum der X_i für $1 \leq i \leq t$.

1. Zeigen Sie, daß $(Y_t)_{t\geq 1}$ und $(Z_t)_{t\geq 1}$ Markov-Ketten sind.

2. Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten?

3. Skizzieren Sie die Kette.

Aufgabe 3 Ehrenfest Modell (15 Punkte)

Wir betrachten einen Behälter, der durch eine Membran in zwei Hälften getrennt wird und in dem sich insgesamt n Moleküle eines Gases befinden. In jedem Zeitschritt wandert ein zufällig ausgewähltes Molekül in die andere Hälfte des Behälters. Modellieren Sie diesen Prozeß als Markov-Kette und berechnen Sie die stationäre Verteilung.

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de