Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 07

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 9.12.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Bin Packing (15 Punkte)

Gegeben seien n Objekte mit den Größen $X_1, \ldots, X_n \in (0, 1]$.
Gesucht ist eine Partition der X_i $(1 \leq i \leq n)$ in Mengen $B_1, \ldots, B_k$, so daß für jedes j mit $1 \leq j \leq k$ $\sum_{X_i \in B_j} X_i \leq 1$ gilt. Sei k^* das Minimum aller möglichen k.
Angenommen die X_i sind unabhängig voneinander und gleichverteilt auf $(0, 1]$.

1. Zeigen Sie, daß $\frac{n}{2} \leq \mathbb{E}[k^*] \leq n$ gilt.
2. Zeigen Sie eine gute Schranke für $\mathbb{P}[|k^* - \mathbb{E}[k^*] \geq \lambda]$.

Aufgabe 2 Random Walk (10 Punkte)

Betrachten wir einen Random Walk auf der Zahlengeraden, bei dem sich ein Teilchen immer auf einer der ganzen Zahlen befindet. Es beginnt bei 0 und bewegt sich pro Zeitschritt gleichwahrscheinlich zu einer der zwei Nachbarzahlen. Es bezeichne X_t die Zufallsvariable, die den *Abstand* des Teilchens vom Ursprung zum Zeitpunkt t mißt.

1. Skizzieren Sie die Markov-Kette $(X_t)_{t \geq 0}$. Was fällt auf?
2. Zeigen Sie, daß die erwartete Entfernung des Teilchens nach n Schritten $\Theta(\sqrt{n})$ ist. Berechnen Sie dazu den erwarteten Zugewinn des Abstands im i-ten Zeitschritt und nutzen Sie die Linearität des Erwartungswerts.

Hinweis. Passen Sie bei 2. besonders auf den Ursprung auf!

Aufgabe 3 Graphfärbung (15 Punkte)

Sei G ein 3-färbbarer Graph. Betrachten wir folgenden Algorithmus um die Knoten des Graphen so zu färben, daß kein Dreieck des Graphen monochromatisch ist. Der Algorithmus beginnt mit einer beliebigen 2-Färbung von G. Solange es noch monochromatische Dreiecke in G gibt, wähle ein solches aus und ändere die Farbe eines darin zufällig bestimmten Knotens.

1. Existiert unter diesen Voraussetzungen eine solche 2-Färbung in G?
2. Modellieren Sie den Prozeß als Markov-Kette. Definieren Sie ein Abstandsmaß von 2-Färbungen und nutzen Sie dieses für die Zustände Ihrer Markov-Kette.

3. Skizzieren Sie die Markov-Kette.
4. Nach welcher erwarteten Anzahl von Schritten erreicht der Algorithmus eine gesuchte 2-Färbung?

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de