Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Dr. Stefanie Gerke
Alexander Offtermatt-Souza

Wintersemester 2002
Übungsblatt 10

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin. Montag, den 20.1.2003 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Pattern Matching (20 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es darum den Algorithmus zum Pattern Matching für Strings auf Matrizen (d.h. Pattern Matching für Grafiken) zu übertragen.
Gegeben. Matrizen $N \in \{0,1\}^{n,n}$ und $M \in \{0,1\}^{m,m}$.
Gefragt. Kommt M in N vor?
Benutzen Sie die Ideen aus dem Algorithmus der Vorlesung für den eindimensionalen Fall und konstruieren sie einen Monte-Carlo Algorithmus für obiges Problem, der Laufzeit $O\left(n^2+m^2\right)$ und Platzbedarf $O\left(n\right)$ hat.

Aufgabe 2 Gleichheit von Multimengen (10 Punkte)

Wir betrachten das Problem zu entscheiden, ob zwei gegebene, gleichmächtige *Multimengen* aus ganzen Zahlen S und T gleich sind, d.h. jede ganze Zahl gleichhäufig in beiden Mengen enthalten ist. Dieses Problem kann in Zeit $O\left(n \log n\right)$ gelöst werden, indem beide Mengen sortiert und elementweise verglichen werden. (Dabei bezeichnet n die Anzahl der Elemente in einer der Mengen). Konstruieren Sie einen randomisierten Algorithmus zur Entscheidung dieses Problems, indem Sie es auf die Verifizierung von Polynomidentitäten zurückführen.

Aufgabe 3 Verifizierung von Polynomidentitäten (10 Punkte)

Erinnern Sie sich an folgenden Satz aus der Vorlesung.

Theorem 3 *Seien A, B, C jeweils $n \times n$ Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $AB \neq C$. Dann gilt für einen zufällig aus $\{0,1\}^n$ gewählten Vektor r $\mathbb{P}\left[ABr = Cr\right] \leq \frac{1}{2}$.*

Zeigen Sie, daß obiger Satz nur ein Spezialfall des Satzes von Schwarz-Zippel ist, indem sie zu $n \times n$ Matrizen A, B, C ein multivariates Polynom Q konstruieren, so daß genau dann $Q \equiv 0$ gilt, wenn $AB = C$ ist.

Theorem 4 (Schwarz-Zippel) *Sei $Q(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ein multivariates Polynom mit Gesamtgrad höchstens d. Sei $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{K}$ fest gewählt und $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{S}$ zufällig gezogen. Dann gilt $\mathbb{P}\left[Q(r_1, \ldots, r_n) = 0 \mid Q(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0\right] \leq \frac{d}{|\mathbb{S}|}$.*

Übungsleitung

Alexander Offtermatt-Souza
Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: offterma@in.tum.de