Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza

Sommersemester 2003
Midterm Klausur

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1. Was trifft zu? (5 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Für unabhängige $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2)$ gilt

$$\min\{X_1, X_2\} \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)\,.$$

(b) Für unabhängige $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2)$ gilt

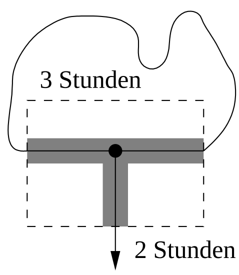
$$\max\{X_1, X_2\} \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)\,.$$

(c) Für unabhängige $X_i \sim \operatorname{Norm}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ mit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$X_1 - X_2 - \cdots - X_n \sim \operatorname{Norm}\left(\mu_1 - \mu_2 - \cdots - \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right).$$

Aufgabe 2. Odyssee (5 Punkte)

Odysseus ist in einem Labyrinth auf einer Kreuzung mit 3 Wegen. Der erste Weg führt nach 2 Stunden zum Ausgang. Der zweite und dritte Weg bilden eine Schleife, die nach 3 Stunden wieder zur Kreuzung führt. Odysseus entscheidet sich immer unabhängig und gleichwahrscheinlich für einen der 3 Wege. Was ist die erwartete Zeit, bis er den Ausgang erreicht?



Aufgabe 3. Fertigstellungszeiten (5 Punkte)

Seien $P_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda_i)$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die unabhängigen *Laufzeiten* von n Jobs, die von einem Prozessor in der Reihenfolge $(1, 2, \ldots, n)$ bearbeitet werden. $C_i = \sum_{j=1}^{i} P_j$ bezeichne die *Fertigstellungszeit* von Job i und $S = \sum_{i=1}^{n} C_i$ die Summe der Fertigstellungszeiten. Berechnen Sie

(a) den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ und

(b) die Varianz $\operatorname{Var}[S]$.

Bitte wenden!

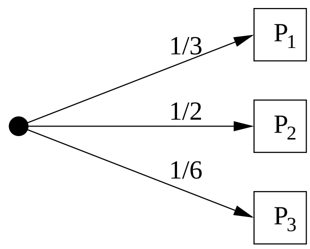
Aufgabe 4. Pólya's Urne (5 Punkte)

Eine Urne enthalte $s \in \mathbb{N}$ schwarze und $r \in \mathbb{N}$ rote Bälle. Nachdem ein Ball zufällig aus der Urne gezogen wurde, wird er und $c \in \mathbb{N}$ weitere Bälle der gleichen Farbe wieder zurück gelegt. Jetzt wird noch ein Ball gezogen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Pr[\text{„der erste Ball ist schwarz“} \mid \text{„der zweite Ball ist rot“}] = \frac{s}{s+r+c}.$$

Aufgabe 5. Dispatcher (7 Punkte)

In nebenstehendem Rechensystem werden ankommende Jobs unabhängig mit den dort angegebenen Wahrscheinlichkeiten den Prozessoren P_1, P_2 bzw. P_3 zugewiesen. Für $i \in \{1,2,3\}$ bezeichne die Zufallsvariable T_i die Bearbeitungszeit eines Jobs, der auf Prozessor P_i bearbeitet wird. Angenommen $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$, P_2 ist doppelt so schnell wie P_1 und P_3 ist vier mal so schnell wie P_1.



(a) Wie lauten die Verteilungen von T_2 bzw. T_3?

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der Bearbeitungszeit T des ersten ankommenden Jobs.

Aufgabe 6. Hypo-Exponentialverteilung (7 Punkte)

Gegeben seien die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $X := X_1 + X_2$. Berechnen Sie Dichte und Verteilung von X.

Aufgabe 7. k mal Kopf (6 Punkte)

Eine Laplacemünze[1] wird n mal unabhängig geworfen ($n \in \mathbb{N}$) und zwar genau k mal von Alice ($0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}_0$) und $n-k$ mal von Bob. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob gleich oft Kopf werfen gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass insgesamt k mal Kopf kommt.

Viel Erfolg!

[1]d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für Kopf