Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza

Sommersemester 2003
Lösungsblatt

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1. Was trifft zu? (5 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Für unabhängige $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ gilt

$$\min\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)\,.$$

(b) Für unabhängige $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ gilt

$$\max\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)\,.$$

(c) Für unabhängige $X_i \sim \text{Norm}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ mit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$X_1 - X_2 - \cdots - X_n \sim \text{Norm}\left(\mu_1 - \mu_2 - \cdots - \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2\right).$$

Lösungsvorschlag

(a) *Wahr.* Satz 2.33 aus *Diskrete Strukturen – Band 2* anwenden.

(b) *Falsch.* Man berechne die Verteilung:

$$F_{\max\{X_1,X_2\}}(t) = \Pr[\max\{X_1, X_2\} \le t] = \Pr[X_1 \le t, X_2 \le t] =$$

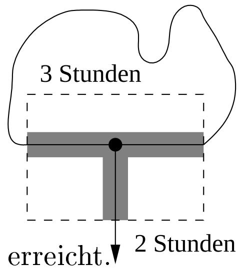
wegen Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} &= \Pr[X_1 \le t]\Pr[X_2 \le t] = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq \\ &\neq 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \end{aligned}$$

(c) *Wahr.* Satz 2.38 mit $a_1 = 1$ und $a_2 = \cdots = a_n = -1$ anwenden.

Aufgabe 2. Odyssee (5 Punkte)

Odysseus ist in einem Labyrinth auf einer Kreuzung mit 3 Wegen. Der erste Weg führt nach 2 Stunden zum Ausgang. Der zweite und dritte Weg bilden eine Schleife, die nach 3 Stunden wieder zur Kreuzung führt. Odysseus entscheidet sich immer unabhängig und gleichwahrscheinlich für einen der 3 Wege. Was ist die erwartete Zeit, bis er den Ausgang erreicht?



Lösungsvorschlag

Die Zufallsvariable X bezeichne die Zeit, bis Odysseus den Ausgang erreicht.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid 1.\text{ Weg}] \Pr[1.\text{ Weg}] + \mathbb{E}[X \mid 2.\text{ Weg}] \Pr[2.\text{ Weg}] + \mathbb{E}[X \mid 3.\text{ Weg}] \Pr[3.\text{ Weg}] =$$

Der 1. Weg führt zum Ausgang, also gilt $\mathbb{E}[X \mid 1.\text{ Weg}] = 2$. Der 2. und 3. Weg führen nach 3 Stunden wieder zur Kreuzung, also $\mathbb{E}[X \mid 2.\text{ Weg}] = \mathbb{E}[X \mid 3.\text{ Weg}] = 3 + \mathbb{E}[X]$.

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} + (3 + \mathbb{E}[X])\frac{1}{3} + (3 + \mathbb{E}[X])\frac{1}{3} =$$
$$= \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\mathbb{E}[X] =$$

auflösen nach $\mathbb{E}[X]$

$$= 8.$$

Aufgabe 3. Fertigstellungszeiten (5 Punkte)

Seien $P_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die unabhängigen *Laufzeiten* von n Jobs, die von einem Prozessor in der Reihenfolge $(1, 2, \ldots, n)$ bearbeitet werden. $C_i = \sum_{j=1}^{i} P_j$ bezeichne die *Fertigstellungszeit* von Job i und $S = \sum_{i=1}^{n} C_i$ die Summe der Fertigstellungszeiten. Berechnen Sie

(a) den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ und

(b) die Varianz $\text{Var}[S]$.

Lösungsvorschlag

Wir stellen die Summe zunächst um, indem wir zählen, wieoft jedes P_i in der Gesamtsumme vorkommt.

$$S = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i(n - i + 1).$$

(a) Wir wenden die Linearität des Erwartungswerts (Satz 1.62) an:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} P_i(n - i + 1)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[P_i](n - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n - i + 1}{\lambda_i}.$$

(b) Wegen der Unabhängigkeit der P_i können wir die Linearität der Varianz, d.h. Satz 1.68 anwenden:

$$\mathrm{Var}\left[S\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} P_i(n-i+1)\right] =$$

wie gesagt mit Satz 1.68

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[P_i(n-i+1)\right] =$$

und Satz 1.50 führt auf

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[P_i\right](n-i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)^2}{\lambda_i^2}.$$

Aufgabe 4. Pólya's Urne (5 Punkte)

Eine Urne enthalte $s \in \mathbb{N}$ schwarze und $r \in \mathbb{N}$ rote Bälle. Nachdem ein Ball zufällig aus der Urne gezogen wurde, wird er und $c \in \mathbb{N}$ weitere Bälle der gleichen Farbe wieder zurück gelegt. Jetzt wird noch ein Ball gezogen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Pr\left[\text{„der erste Ball ist schwarz“} \mid \text{„der zweite Ball ist rot“}\right] = \frac{s}{s+r+c}.$$

Lösungsvorschlag

Für diese Aufgabe ist der Satz von Bayes, d.h. Satz 1.22 durchaus hilfreich. Die Zufallsvariable B_1 bezeichne die Farbe des ersten und B_2 die Farbe des zweiten Balls. Jetzt rechnen wir

$$\Pr\left[B_1 = s \mid B_2 = r\right] = \frac{\Pr\left[B_1 = s \cap B_2 = r\right]}{\Pr\left[B_2 = r\right]} =$$

mit dem Satz von Bayes

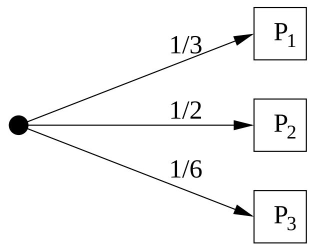
$$= \frac{\Pr\left[B_2 = r \mid B_1 = s\right]\Pr\left[B_1 = s\right]}{\Pr\left[B_2 = r \mid B_1 = s\right]\Pr\left[B_1 = s\right] + \Pr\left[B_2 = r \mid B_1 = r\right]\Pr\left[B_1 = r\right]} =$$

$$= \frac{\frac{r}{r+s+c}\frac{s}{r+s}}{\frac{r}{r+s+c}\frac{s}{r+s} + \frac{r+c}{r+s+c}\frac{r}{r+s}} =$$

$$= \frac{rs(r+s)(r+s+c)}{(rs+(r+c)r)((r+s+c)(r+s))} = \frac{s}{s+r+c}.$$

Aufgabe 5. Dispatcher (7 Punkte)

In nebenstehendem Rechensystem werden ankommende Jobs unabhängig mit den dort angegebenen Wahrscheinlichkeiten den Prozessoren P_1, P_2 bzw. P_3 zugewiesen. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ bezeichne die Zufallsvariable T_i die Bearbeitungszeit eines Jobs, der auf Prozessor P_i bearbeitet wird. Angenommen $T_1 \sim \mathrm{Exp}\,(1)$, P_2 ist doppelt so schnell wie P_1 und P_3 ist vier mal so schnell wie P_1.



(a) Wie lauten die Verteilungen von T_2 bzw. T_3?

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der Bearbeitungszeit T des ersten ankommenden Jobs.

Lösungsvorschlag

(a) Um die Verteilungen von T_2 und T_3 zu berechnen stellen wir zunächst fest, dass P_2 doppelt so schnell ist wie P_1 und P_3 vier mal so schnell ist wie P_1, d.h. es gilt

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1 \quad \text{und} \quad T_3 = \frac{1}{4} T_1.$$

Mit der Skalierungseigenschaft exponentialverteilter Zufallsvariablen (Satz 2.24) gilt dann:

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1 \sim \mathrm{Exp}\,(2) \quad \text{und} \quad T_3 = \frac{1}{4} T_1 \sim \mathrm{Exp}\,(4)\,.$$

(b) Die Verteilung rechnen wir aus, indem wir auf den ausführenden Prozessor bedingen:

$$F_T(t) = \Pr[T \le t] =$$

wir bedingen auf P_1, P_2 bzw. P_3

$$= \Pr[T \le t \mid P_1] \Pr[P_1] + \Pr[T \le t \mid P_2] \Pr[P_2] + \Pr[T \le t \mid P_3] \Pr[P_3] =$$

nachdem wir die Verteilung der Bearbeitungszeiten auf den einzelnen Prozessoren kennen

$$\begin{aligned}
&= \Pr[T_1 \le t] \Pr[P_1] + \Pr[T_2 \le t] \Pr[P_2] + \Pr[T_3 \le t] \Pr[P_3] = \\
&= F_{T_1}(t)\frac{1}{3} + F_{T_2}(t)\frac{1}{2} + F_{T_3}(t)\frac{1}{6} = (1 - e^{-t})\frac{1}{3} + (1 - e^{-2t})\frac{1}{2} + (1 - e^{-4t})\frac{1}{6} = \\
&= 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Hypo-Exponentialverteilung (7 Punkte)

Gegeben seien die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $X := X_1 + X_2$. Berechnen Sie Dichte und Verteilung von X.

Lösungsvorschlag

Hier geht es um eine Anwendung von Satz 2.37. Wir rechnen zunächst die Dichte aus:

$$\begin{aligned}
f_X(t) = f_{X_1+X_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(s) f_{X_2}(t-s) ds = \\
&= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-s)} = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s} ds = \\
&= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s} \right]_0^t = \\
&= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left(-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t} + \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \right) = \\
&= -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} f_{X_1}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} f_{X_2}(t).
\end{aligned}$$

Damit können wir die Verteilung direkt angeben:

$$F_X(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} F_{X_1}(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} F_{X_2}(t).$$

Aufgabe 7. k mal Kopf (6 Punkte)

Eine Laplacemünze[1] wird n mal unabhängig geworfen ($n \in \mathbb{N}$) und zwar genau k mal von Alice ($0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}_0$) und $n-k$ mal von Bob. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob gleich oft Kopf werfen gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass insgesamt k mal Kopf kommt.

Lösungsvorschlag

Für diese Aufgabe gibt es zwei Lösungswege: der erste nutzt die Fairness der Münze aus; der zweite geht über brutales Nachrechnen. Es bezeichne K_A die Anzahl Kopf von Alice, $\overline{K}_A$ die Anzahl Zahl von Alice, K_B und $\overline{K}_B$ entsprechend für Bob. Weiter bezeichnet $K_A + K_B$ die Gesamtzahl von Kopf. Und wir stellen fest, dass $K_A \sim \operatorname{Bin}\left(k, \frac{1}{2}\right)$ und $K_B \sim \operatorname{Bin}\left(n-k, \frac{1}{2}\right)$ gilt.

1. Variante. Nachdem die Münze fair ist, gilt für *jedes* i (ganz egel ob i eine Zufallsvariable ist oder nicht), dass $\Pr[K_A = i] = \Pr\left[\overline{K}_A = i\right]$. Also gilt:

$$\Pr[K_A = K_B] = \Pr\left[\overline{K}_A = K_B\right] = \Pr[k - K_A = K_B] = \Pr[K_A + K_B = k].$$

[1] d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für Kopf

2. Variante Beim Nachrechnen sollte man sich an die Vandermonde'sche Identität (Satz 1.19 aus Diskrete Strukturen – Band 1) erinnern:

$$
\begin{aligned}
\Pr[K_A = K_B] &= \sum_{i=0}^{k} \Pr[K_A = i] \Pr[K_B = i] = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{k-i}} \binom{n-k}{i} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{n-k-i}} = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{i} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{k-i} \binom{n-k}{i} =
\end{aligned}
$$

mit der Vandermonde'schen Identität

$$
= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \Pr[K_A + K_B = k]
$$