Aufgabe 1 (Royal Flush)

Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{T : T \subset \{1, 2, \ldots, 52\}, |T| = 5\}$$
$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$
$$\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

Ereignis $R \subset \Omega$: „Royal Flush einer Farbe“

Es gibt genau 4 Royal Flushs; für jede der Farben Caro, Herz, Kreuz, Pik genau einen.

$$\Pr[R] = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

Ereignis $H \subset \Omega$: „Letzte Karte ist Herz-Ass“

$$\Pr[H] = \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$$

Uns interessiert $\Pr[R \mid H]$

$$\Pr[R \mid H] = \frac{\Pr[R \cap H]}{\Pr[H]} = \frac{\Pr[H \mid R]\Pr[R]}{\Pr[H]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\frac{4}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{1}{1}\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}} = \frac{1}{\binom{51}{4}} = \frac{13}{5}\Pr[R]$$

Aufgabe 2 (Gezinkte Münzen)

Ereignisse

$$\begin{aligned} K &: \ \text{Kopf} \\ K_j &: \ \text{Im } j\text{-ten Wurf Kopf} \\ M_k &: \ \text{Münze } k \text{ gewählt } k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \Pr[K \mid M_1] &= \Pr\left[K_j \,\middle|\, M_1\right] = \frac{1}{3} \\ \Pr[K \mid M_2] &= \Pr\left[K_j \,\middle|\, M_2\right] = \frac{2}{3} \\ \Pr[K \mid M_3] &= \Pr\left[K_j \,\middle|\, M_3\right] = 1 \\ \Pr[M_k] &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten für $\Pr[M_k \mid K_1]$ $k = 1, 2, 3$

Satz von Bayes bzw. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit liefert:

$$\Pr[M_k \mid K_1] = \frac{\Pr[M_k \cap K_1]}{\Pr[K_1]} =$$
$$= \frac{\Pr[K_1 \mid M_k]\Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^{3} \Pr[K_1 \mid M_k]\Pr[M_k]}$$

Einsetzen der Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[M_1 \mid K_1] = \frac{1}{6} \quad \Pr[M_2 \mid K_1] = \frac{1}{3} \quad \Pr[M_3 \mid K_1] = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für $\Pr[K_2 \mid K_1]$

$$\begin{aligned}
\Pr[K_2 \mid K_1] &= \frac{\Pr[K_1 \cap K_2]}{\Pr[K_1]} = \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{3} \Pr[K_1 \cap K_2 \mid M_k] \Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^{3} \Pr[K_1 \mid M_k] \Pr[M_k]} = \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{3} \Pr[K \mid M_k]^2 \Pr[M_k]}{\sum_{k=1}^{3} \Pr[K \mid M_k] \Pr[M_k]} = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + 1^2 \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \\
&= \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (ZmZ und ZoZ)

(1) **Erwartungswerte**

Die Erwartungswerte für S_{ZmZ} und S_{ZoZ} sind gleich:

$$\mathbb{E}\left[S_{\mathsf{ZmZ}}\right] = \mathbb{E}\left[S_{\mathsf{ZoZ}}\right] = \frac{1}{2}k(n+1)$$

Im Erwartungswert spielen die Abhängigkeiten durch ZoZ keine Rolle!

Frage: Kann man S_{ZmZ} als Approximation für S_{ZoZ} verwenden? Denn mit S_{ZmZ} rechnet es sich leichter als mit S_{ZoZ}.
Betrachten wir die Varianzen.

(2) **Varianzen**

Für die Varianzen gilt:

$$\mathsf{Var}\left[S_{\mathsf{ZmZ}}\right] = \frac{1}{12}k(n+1)(n-1) \geq \frac{1}{12}k(n+1)(n-k) = \mathsf{Var}\left[S_{\mathsf{ZoZ}}\right]$$

Intuition: Die erwartete Abweichung vom Erwartungswert ist bei S_{ZmZ} immer größer als bei S_{ZoZ}.

Aber für „kleine“ k gilt

$$\mathsf{Var}\left[S_{\mathsf{ZmZ}}\right] \approx \mathsf{Var}\left[S_{\mathsf{ZoZ}}\right].$$

Antwort: Also kann man für „kleine“ k S_{ZmZ} als Approximation für S_{ZoZ} verwenden.