Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 03

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Verteilung des Minimums)

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungen $F_X(t) := \Pr[X \leq t]$ und $F_Y(t) := \Pr[Y \leq t]$.
Berechnen Sie für $Z := \min\{X, Y\}$ die Verteilung $F_Z(t) := \Pr[Z \leq t]$ (in Abhängigkeit von $F_X(t)$ und $F_Y(t)$).

Aufgabe 2 (Serverausfälle)

Ein Server fällt am i-ten Tag mit Wahrscheinlichkeit p_i aus. X sei die Anzahl der Tage bis zum ersten Ausfall.

(a) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für $\Pr[X = n]$ und $\Pr[X > n]$.

(b) Betrachten Sie die Spezialfälle

(1) $p_i = \frac{1}{i+1}$
(2) $p_i = 1 - e^{-\lambda i}$.

Berechnen Sie jeweils $\Pr[X > n]$ und entscheiden Sie, ob $\mathbb{E}[X]$ existiert[1].

Aufgabe 3 (Mensch gegen Maschine)

Gary Kasparov und Deep Blue spielen Schach, wobei Deep Blue eine Partie mit Wahrscheinlichkeit p gewinnt. Wie viele Partien spielen die beiden im Mittel, bis einer von Ihnen zwei Partien in Folge für sich entschieden hat?

Aufgabe 4 (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung)

Eine Zufallsvariable X ist heißt *gedächtnislos*, falls für alle $x, y \in W_X$ gilt

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x].$$

Zeigen Sie, daß eine Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ *genau dann* geometrisch verteilt ist, wenn sie gedächtnislos ist.

[1] d.h. $\mathbb{E}[X] < \infty$

Aufgabe 5 (Was trifft zu?)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$, $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$ und $Z := X \cdot Y$ gilt $Z \sim \text{Bernoulli}(p_X \cdot p_Y)$.

(b) Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$, $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$ und $Z := X + Y$ gilt $Z \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{p_X + p_Y}{2}\right)$.

(c) Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ und $Z := X + Y$ gilt $Z \sim \text{Bin}(n + m, p)$.

(d) Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \text{Bin}(n, p_X)$, $Y \sim \text{Bin}(n, p_Y)$ und $Z := X + Y$ gilt $Z \sim \text{Bin}\left(2n, \frac{p_X + p_Y}{2}\right)$.

(e) Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \text{Po}(\lambda)$, $Y \sim \text{Po}(\mu)$ und $Z := X + Y$ gilt $Z \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$.