Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 04

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Schärfe der Markov-Ungleichung)

Zeigen Sie, dass die Markov-Ungleichung in folgendem Sinne scharf ist: Geben Sie für jedes $t \in \mathbb{N}$ jeweils eine positive Zufallsvariable X an, so dass gilt

$$\Pr[X \geq t] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Aufgabe 2 (Lastverteilung)

Angenommen wir haben m Jobs die wir auf n Rechner in einem Rechnernetz verteilen wollen, wobei zusätzlich $m > n$ gilt. Wir entscheiden uns für folgende Strategie: jeder der m Jobs wird unabhängig und gleichwahrscheinlich einem der n Rechner zugewiesen. Wir untersuchen die Zufallsvariablen

$$X_i = \text{Anzahl der Jobs im } i\text{-ten Rechner}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $X = \max\{X_i : i = 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Chernoff-Schranke und der Booleschen Ungleichung

$$\Pr\left[X \geq \frac{m}{n} + \sqrt{6\frac{m}{n}\ln n}\right] \leq \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 3 (Verhältnis geometrisch verteilter Zufallsvariablen)

Seien $X \sim \mathrm{Geo}(p_X)$ und $Y \sim \mathrm{Geo}(p_Y)$ unabhängig und $R = \frac{X}{Y}$. Berechnen Sie

(a) $\Pr[R > 1]$ und

(b) $\Pr\left[R = \frac{m}{n}\right]$ für teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (Chernoff für Summen geometrischer Zufallsvariablen)

Seien $X_i \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$ unabhängig für $i = 1, \ldots, n$ und $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, sowie $\mu = \mathbb{E}[X]$. Zeigen Sie analog zum Beweis der Chernoff-Schranke[1]

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{(1+\delta)^{1+\delta}}{\sqrt{(1+2\delta)^{1+2\delta}}}\right)^{2n}.$$

[1] Sollten Sie dabei eine kompliziertere Funktion ableiten wollen, hilft Ihnen Maple mit dem `diff` Befehl Papier zu sparen.