Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 05

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Routerausfälle)

Ein Rechernetz enthalte n Router, die im Mittel jeweils t Zeiteinheiten zuverlässig laufen, bis es zu einem Absturz oder ähnlichen Problemen kommt. Wir nehmen an, dass die Zeitdauer bis zum Absturz eines einzelnen Routers exponentialverteilt ist und die Abstürze der Router unabhängig erfolgen. Ferner werden für den reibungslosen Netzbetrieb alle Router benötigt. Geben Sie die Verteilung der Zeitdauer T bis zur ersten Störung des Netzes an und berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$.

Aufgabe 2 (Verteilung von Betrag und Wurzel)

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung F_X. Berechnen Sie die Verteilung und die Dichte von $A := |X|$ und $B := \sqrt{|X|}$.

Aufgabe 3 (Punkt im Dreieck)

In einem Dreieck mit Grundseite g und Höhe h werde ein Punkt P gleichverteilt gewählt. X sei die Entfernung von P zur Grundseite. Berechnen Sie Verteilung und Dichte von X.

Aufgabe 4 (Lebensdauer)

Gegeben seien zwei Glühbirnen mit unabhängiger und exponentialverteilter Lebensdauer (jeweils mit Parameter $\lambda = 1$). Ferner bezeichne die Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}\,(1)$ die Lebensdauer der ersten und $Y \sim \mathrm{Exp}\,(1)$ die der zweiten Glühbirne. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X}{X+Y},$$

die den Anteil der ersten Glühbirne an der Gesamtlebensdauer misst gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist.

Aufgabe 5 (Erlang-Verteilung)

Seien die Zufallsvariablen $X_i \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$ für $i = 1, \ldots, n$ unabhängig, exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion nach n), dass $X \sim \mathrm{Er}\,(\lambda, n)$ *Erlang* verteilt mit Parameter λ und Stufenzahl n ist, d.h. die Verteilung

$$F_X(t) = \Pr\left[X \le t\right] = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

besitzt.