Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 06

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Partielle Ordnungen)

Es seien X_1, X_2, X_3, X_4 unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F(x)$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X_1 < X_2, X_3 < X_4, X_3 < X_2]$.

Aufgabe 2 (Netzlast)

Die Last auf einem Netzwerk beträgt mindestens 1 Mb/s und besitzt ansonsten die Verteilung $F(y) = 1 - \frac{1}{y^2}$.

1. Welche Last ist zu erwarten?
2. Berechnen Sie den Erwartungswert in kb/s unter der Annahme, dass die Grundlast nun 0 kb/s beträgt.

Aufgabe 3 (Erwartungswerte)

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Man betrachte $Y := \exp(aX)$ mit $a > 0$.

a) Wie lautet die Dichte f_Y von Y?

b) Für welche Werte von a existiert $\mathbb{E}[Y]$?

c) Existiert der Erwartungswert auch für $a \leq 0$?

Aufgabe 4 (Ungleichung von Jensen)

Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert. Zeigen Sie, dass für jede konvexe[1] Funktion g gilt: $\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$.

Aufgabe 5 (log-Normalverteilung)

Eine Zufallsvariable X heisst log-*normalverteilt* mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie folgende Dichte besitzt:

$$f_X(x) := \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

Dabei sei $x > 0$. Zeigen Sie, dass $Y := \ln X$ die Verteilung $Y \sim \text{Norm}\left(\mu, \sigma^2\right)$ besitzt.

[1] Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ exsitiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $g(x) \geq g(a) + \lambda(x - a)$. Man kann also an den Punkt $(a, g(a))$ eine Gerade mit Steigung λ anlegen, so dass g vollständig oberhalb dieser Geraden liegt.