Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 09

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Schach)

Alice und Bob spielen Schach, wobei Alice mit Wahrscheinlichkeit p gewinnt. Wenn Bob zweimal hintereinander verliert, ist er frustriert und hat keine Lust mehr zu spielen. Wie viele Partien spielen Alice und Bob im Mittel?

Aufgabe 2 (Würfelspiel)

Statt Schach spielen Alice und Bob nun folgendes Spiel: Alice würfelt so lange, bis sie entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist Bob an der Reihe) oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl würfelt (dann ist das Spiel zu Ende und Alice hat gewonnen). Falls Bob an der Reihe ist, würfelt er nur einmal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so hat Bob gewonnen. Ansonsten ist Alice wieder an der Reihe. Alice beginnt.

a) Wie stehen diesmal die Chancen von Bob, das Spiel zu gewinnen?

b) Wie lange dauert ein Spiel im Mittel?

Aufgabe 3 (Reisegruppe)

Eine Reisegruppe befindet sich auf einer Rundereise durch die Städte $0, 1, ..., n$ (n ungerade), wobei pro Stadt ein Tag vorgesehen ist. Die Städte $2i$ ($i \in \{0, 1, 2, ...\}$) sind so schön, dass die Gruppe mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen weiteren Tag dort verbringt. Da die Reiseleitung etwas verwirrt ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt besuchte Stadt angefahren wird, gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass die Route planmäßig fortgesetzt wird.

a) Modellieren Sie eine entsprechende Markovkette $\mathscr{M}_R$. Ist $\mathscr{M}_R$ ergodisch?

b) Wie lautet (falls existent) die stationäre Verteilung?

Aufgabe 4 (Aperiodische Markovketten)

Gegeben ist eine beliebige Markovkette $\mathscr{M}$ ohne Schleifen.

a) Beweisen Sie, dass $\mathscr{M}$ aperiodisch ist, falls man Schleifen mit Wahrscheinlichkeit p hinzufügt und die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechend skaliert.

b) Nun sei $\mathscr{M}$ irreduzibel. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall ausreichend ist, an genau einem Zustand eine Schleife einzufügen, um $\mathscr{M}$ aperiodisch zu machen.