Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Übungsblatt 11

Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1 (Hypo-Exponentialverteilung)

Gegeben seien die unabhängigen Zufallsvariablen $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $X := X_1 + X_2$. Berechnen Sie Dichte und Verteilung von X.

Aufgabe 2 (Fussball)

a) Eine Fussballmannschaft gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$. Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mehr als die Hälfte von n Spielen gewinnt.

b) Nach einer erfolglosen Saison wird ein neuer Trainer engagiert und die Mannschaft verstärkt. Experten sehen die Siegchancen nun bei $p = 3/4$. Wie kann man jetzt die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als die Hälfte der Spiele verloren wird, möglichst scharf beschränken?

Aufgabe 3 (Roboter)

Ein Roboter bewegt sich zufällig auf einem Schachbrett der Grösse 3×3 (also mit 9 Feldern). In jedem Schritt wählt er ein zufälliges Nachbarfeld des aktuellen Feldes aus (wobei alle Nachbarfelder gleich wahrscheinlich sind) und geht dorthin. Die Nachbarfelder sind dabei die Felder, die horizontal, vertikal oder diagonal benachbart sind. Das Feld in der Mitte hat also 8 Nachbarn, während ein Eckfeld nur 3 Nachbarn hat.

a) Modellieren Sie den Prozess als Markov-Kette in diskreter Zeit mit 9 Zuständen und zeichnen Sie das Übergangsdiagramm.

b) Modellieren Sie denselben Prozess als Markov-Kette in diskreter Zeit mit nur 3 Zuständen ("Roboter ist auf einem Eckfeld", "ist im Feld in der Mitte" und "ist in einem Feld am Rand, aber nicht im Eck") und zeichnen Sie das Übergangsdiagramm.

c) Warum hat die Markov-Kette aus (b) eine eindeutige stationäre Verteilung?

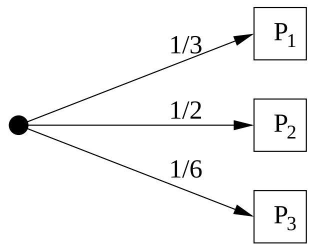
d) Warum konvergiert die Zustandsverteilung der Markov-Kette aus (b) unabhängig vom Startzustand gegen diese stationäre Verteilung?

e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette aus (b). Was können Sie nun über die stationäre Verteilung der Markov-Kette aus (a) ableiten?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Dispatcher)

In nebenstehendem Rechensystem werden ankommende Jobs unabhängig mit den dort angegebenen Wahrscheinlichkeiten den Prozessoren P_1, P_2 bzw. P_3 zugewiesen. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ bezeichne die Zufallsvariable T_i die Bearbeitungszeit eines Jobs, der auf Prozessor P_i bearbeitet wird. Angenommen $T_1 \sim \text{Exp}\,(1)$, P_2 ist doppelt so schnell wie P_1 und P_3 ist vier mal so schnell wie P_1.



a) Wie lauten die Verteilungen von T_2 bzw. T_3?

b) Bestimmen Sie die Verteilung der Bearbeitungszeit T des ersten ankommenden Jobs.