Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 1
16.April 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

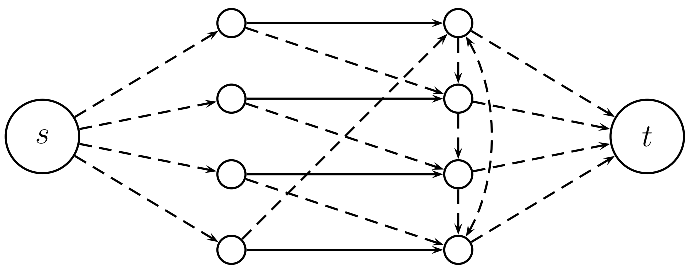
(Abgabetermin: Donnerstag, den 24.April 2003, vor der Uebungsstunde)

Aufgabe 1

Für $\boxed{r := \frac{\sqrt{5}-1}{2} (\simeq 0,6)}$ gilt die Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} =: \sigma$$

Betrachte folgendes Netzwerk:



Die gestrichelt gezeichneten Kanten haben alle die Kapazität σ, die anderen, von oben nach unten, die Kapazität r^0, r^1, r^2 und r^3.
a)Bestimme den maximalen Fluss von s nach t.
b)*Zeige:* Es gibt eine Folge von augmentierenden Pfaden, so daß die Ford/Fulkerson-Methode versagt, denn die zugehörigen Flusswerte konvergieren von unten gegen einen Wert, der echt kleiner als der maximale Fluss ist. [Tip: In jedem Schritt i injiziere genau r^i zusätzlichen Fluss in das Netzwerk. *Zeige:* $\forall i \in \mathbb{N}_0 : r^{i+1} = r^{i-1} - r^i$]

Aufgabe 2

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, wie sich das Problem, ob eine 0-1-Matrix (der Dimension $n \times n$) existiert, deren Zeilensummenvektor gleich u und deren Spaltensummenvektor gleich v ist, auf ein maximales Flussproblem reduzieren läßt. Welche Bedingungen ergeben sich für die Existenz einer solchen Matrix etwa aus dem min-cut-max-flow Satz? Sind diese Bedingungen hinreichend?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Rechtfertigen Sie Ihre Antworten, indem Sie entweder einen Beweis geben oder aber ein Gegenbeispiel konstruieren.

1. Ist f ein maximaler Fluss, so gilt entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ eines Netzwerkes $G = (V, E)$.
2. Jedes Netzwerk besitzt einen maximalen Fluss f, für den entweder $f(e) = 0$ oder $f(e) = c(e)$ für jede Kante $e \in E$ gilt.
3. Wenn alle Kanten eines Netzwerkes paarweise verschiedene Kapazitäten haben, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Schnitt.
4. Wenn man in einem Netzwerk jede gerichtete Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt, so bleibt der Wert eines maximalen Flusses unverändert.
5. Wenn man jede Kantenkapazität mit einer positiven Zahl λ multipliziert, so bleibt der Wert eines minimalen Schnittes unverändert.
6. Wenn man zu jeder Kantenkapazität eine positive Zahl λ addiert, so bleibt der Wert eines minimalen Schnittes unverändert.

Aufgabe 4

Benutze den Ford-Fulkerson Algorithmus, um den maximalen Fluss im folgenden Netzwerk zu berechnen :