Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 10
18. Juni 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Letzter Abgabetermin: Mittwoch, 25. Juni 2003 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Für eine Matrix A und einen Vektor b sei $Ax \leq b$ lösbar, und es gelte für einen Vektor c und einen Skalar δ, dass $c^T x \leq \delta$ für jede Lösung von $Ax \leq b$. Dann existiert ein $\delta' \leq \delta$, für das die lineare Ungleichung $c^T x \leq \delta'$ eine nichtnegative Linearkombination der Ungleichungen des Systems $Ax \leq b$ ist.

Aufgabe 2

Seien A eine Matrix, b, c Vektoren, und sei der Wert der optimalen Lösung der LP-Probleme

$$\max\{c^T x; Ax \leq b\} = \min\{y^T b; y \geq 0, y^T A = c\}$$

endlich. Dann wird obiges Minimum durch einen Vektor $y^T \geq 0$ angenommen, dessen positive Komponenten linear unabhängigen Zeilen der Matrix A entsprechen.

Aufgabe 3

Gegeben sei das LP-Problem $\max\{c^T x; Ax \leq b, x \geq 0\}$. Dies entspricht dem Tableau

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c^T & 0 \\ b & A & I \end{pmatrix}.$$

Falls es eine endliche Lösung des Problems gibt, so führt der Simplex-Algorithmus schließlich zum Tableau

$$M' = \begin{pmatrix} -d' & c'^T & c''^T \\ b' & A' & A'' \end{pmatrix},$$

das sich mit Hilfe einer geeigneten, nicht-singulären Matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ in der Form $M' = QM$ darstellen läßt.

Wie erhält man aus Q eine Lösung des dualen LP-Problems $\min\{b^T y; A^T y \geq c, y \geq 0\}$?

Aufgabe 4

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{minimiere} & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +2x_4 & \\
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & \leq 7 \\
 & -x_1 & -2x_2 & +4x_3 & & \leq 12 \\
 & -x_1 & -x_2 & +x_3 & +8x_4 & \leq 10 \\
 & & & & \multicolumn{2}{r}{x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4}
\end{array}$$

Lösen Sie das Problem mit dem Simplexalgorithmus. Ist die optimale Lösung eindeutig?