Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 11
25. Juni 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Letzter Abgabetermin: Mittwoch, 2. Juli 2003 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Lösen Sie folgendes LP-Problem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximiere} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & -x_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & -x_2 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & -x_3 & \leq & 0
\end{array}$$

Aufgabe 2

Durch Mischung von roter und blauer Farbe sollen die Farben Purpur (80% rot, 20% blau) und Lila (40% rot, 60% blau) hergestellt werden. Dazu sind 20 hl rote und 20 hl blaue Farbe verfügbar, der Gewinn ist 50$ pro Hektoliter Mischung (egal ob Purpur oder Lila). Verschlechtert sich der größtmögliche Profit, wenn die Verpflichtung besteht, wenigstens 15 hl Purpur zu liefern? (Verwenden Sie den Simplex–Algorithmus und fertigen Sie eine Skizze des zulässigen Bereichs an.)

Aufgabe 3

Wie in der Vorlesung sei B eine symmetrische, positiv definite Matrix, x' ein Vektor und $a \neq 0$ eine Richtung im $\mathbb{R}^n$. Sie definieren ein Ellipsoid $E := \{x : (x-x')^T B^{-1}(x-x') \leq 1\}$ mit Zentrum x'. Wir definieren:

$$\begin{array}{rcl}
y' & := & x' - \frac{1}{n+1}\frac{Ba}{\sqrt{a^T Ba}} \\
B' & := & \frac{n^2}{n^2-1}\left(B - \frac{2}{n+1}\frac{(Ba)(Ba)^T}{a^T Ba}\right).
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass E' das Ellipsoid von minimalem Volumen ist, das mit der Hyperebene $H := \{x : a^T(x-x') = 0\}$ denselben Schnitt besitzt wie E und tangential zu der Hyperebene verläuft, die zu H parallel ist und den Punkt $x' - \frac{Ba}{\sqrt{a^T Ba}}$ enthält.

Aufgabe 4

Sei mit $Ax \leq b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ein System linearer Ungleichungen gegeben. Für $1 \leq i \leq m$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\Theta_i(x) := a_i^T x - b_i$, und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt. Beweisen Sie:

a) Es existiert ein $x_1 \in \mathbb{R}^n$, so daß $\Theta_i(x_1) \leq \max\{0, \Theta_i(x_0)\}$ für $1 \leq i \leq m$.

b) Der Teilraum, der durch $\{a_i : \Theta_i(x_1) \geq 0\}$ aufgespannt wird, enthält alle Vektoren a_j.