Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2003
Übungsblatt 7
28. Mai 2003

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen II

Letzter Abgabetermin: 4. Juni 2003 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgendes Lineare Programm:

$$\begin{array}{lll} \text{maximiere} & x_1 + x_2 & \\ \text{unter} & sx_1 + tx_2 & \leq \; 1 \\ & x_1, x_2 & \geq \; 0. \end{array}$$

Welche Bedingungen müssen $s, t \in \mathbf{R}$ erfüllen, damit das LP

a) eine optimale Lösung besitzt

b) lösbar bzw.

c) unbeschränkt ist?

Aufgabe 2

Formulieren Sie das folgende Regressionsproblem als lineares Programm: Es seien n Punkte der Ebene durch ihre Koordinaten $(p_i, q_i), 1 \leq i \leq n$ gegeben. Bestimmen Sie die Gerade, deren maximaler vertikaler Abstand zu diesen Punkten am kleinsten ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Aussage, daß für Elemente aus $\mathbf{Q}$ das Gausssche Eliminationsverfahren im Bitmodell polynomielle Laufzeit in der Grösse der Eingabematrix A hat.

Hinweis: Es ist hauptsächlich zu zeigen, daß die Grösse aller während der Rechnung auftretenden Zahlen polynomiell in size(A) beschränkt ist. Sei dazu

$$A_k = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

die Matrix nach dem k-ten Eliminationsschritt. Beweisen Sie zunächst, daß sich $\delta_{i,j}$, der (i,j)-te Eintrag von D, wie folgt darstellen lässt:

$$\delta_{i,j} = \det((A_k)^{1,\ldots,k,k+i}_{1,\ldots,k,k+j}) / \det((A_k)^{1,\ldots,k}_{1,\ldots,k}),$$

wobei $M^{i_1,\ldots,i_t}_{j_1,\ldots,j_t}$ die Untermatrix einer Matrix M bezeichnet, die von den Zeilen $i_1, \ldots, i_t$ und den Spalten $j_1, \ldots, j_t$ induziert wird.

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz: Sei A eine Matrix, b ein Spaltenvektor, c ein Zeilenvektor, und δ eine Zahl. Angenommen, $Ax = b$ habe eine Lösung, dann impliziert $Ax = b$, dass $cx = \delta$ gdw. es einen Zeilenvektor y gibt, sodass $yA = c$ und $yb = \delta$.